Vigirdas Mackevičius

I. KELIŲ KINTAMŲJŲ FUNKCIJOS

1. Erdvė $\mathbb{R}^k$

1.1. Apibrėžimas. Erdve $\mathbb{R}^k$ vadinama aibė

$$\mathbb{R}^k := \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{k} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) : \ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Erdvės $\mathbb{R}^k$ taškai $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ dar vadinami *k-mačiais realiaisiais vektoriais*, o skaičiai $x_1, x_2, \ldots, x_k$ – jų *koordinatėmis.*[1] Dviejų taškų $x, y \in \mathbb{R}^k$ *skaliarine sandauga* vadinamas skaičius

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{k} x_i y_i.$$

Skaičius $|x| := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}$ vadinamas taško $x \in \mathbb{R}^k$ *norma* (arba vektoriaus x ilgiu).

Norma dažnai žymima ir simboliu $\|x\|$. Mes šį simbolį rezervuojame matricos normos žymėjimui.

1.2. Teiginys (Skaliarinės sandaugos ir normos savybės).

1) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle, \qquad x, y \in \mathbb{R}^k;$
2) $\langle x, x\rangle \geq 0; \qquad \langle x, x\rangle = 0 \iff x = \mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0);$
3) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle, \quad x, y, z \in \mathbb{R}^k;$
4) $|\langle x, y\rangle| \leq |x|\,|y|, \qquad x, y \in \mathbb{R}^k;$
5) $|x| \geq 0; \qquad |x| = 0 \iff x = \mathbf{0};$
6) $|\alpha x| = |\alpha|\,|x|, \qquad x \in \mathbb{R}^k, \alpha \in \mathbb{R}.$
7) $|x + y| \leq |x| + |y|, \qquad x, y \in \mathbb{R}^k$ *(trikampio nelygybė).*

Pastaba. Vektoriai sudedami ir dauginami iš skaičiaus (skaliaro) „pakoordinačiui“: $(x + y)_i := x_i + y_i$, $(\alpha x)_i := \alpha x_i$.

---

[1] Paprastai (nors ir nevisada) vektoriaus koordinatės žymimos ta pačia indeksuota raide, kaip ir pats vektorius.

Įrodymas. 1), 2), 3) savybės akivaizdžios.

4) Pasinaudodami 2) savybe, su visais $x, y \in \mathbb{R}^k$ ir su visais $\lambda \in \mathbb{R}$ turime

$$\begin{aligned} P(\lambda) := &< \lambda x - y, \lambda x - y\rangle = \lambda\langle x, x\rangle - 2\lambda\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ =&\lambda^2|x|^2 - 2\lambda\langle x, y\rangle + |y|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Todėl kvadratinio trinario P diskriminantas

$$D := 4\langle x, y\rangle^2 - 4|x|^2|y|^2 \leq 0 \implies |\langle x, y\rangle| \leq |x||y|.$$

5) ir 6) savybės akivaizdžios.

7) $|x+y|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$ △

1.3. Apibrėžimas. *Metrika* arba *atstumu* erdvėje $X = \mathbb{R}^k$ vadinama funkcija $d\colon X \times X \to [0, \infty)$, apibrėžiama lygybe

$$d(x, y) := |x - y|, \qquad x, y \in X.$$

1.4. Teiginys (Metrikos savybės).

1) $d(x, y) = d(y, x), \qquad x, y \in X;$

2) $d(x, y) = 0 \iff x = y;$

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \qquad x, y, z \in X$ *(trikampio nelygybė).*

Įrodymas. 1) ir 2) išplaukia iš 5) ir 6) normos savybių (1.2 teiginys).

3) $d(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y).$ △

1.5. Pastabos. Tiesinė erdvė X, kurioje apibrėžta skaliarinė sandauga, t.y., funkcija $\langle \cdot, \cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{R}$ su 1), 2) ir 3) savybėmis, vadinama *euklidine* (arba Euklido) erdve. Taigi erdvė $\mathbb{R}^k$ yra euklidinė. Kitas euklidinės erdvės pavyzdys: visų tolydžių intervale $[a, b]$ funkcijų erdvė $X = C[a, b]$ su skaliarine sandauga

$$\langle x, y\rangle := \int_a^b x(t)y(t)\, dt, \qquad x, y \in X.$$

Tiesinė erdvė X, kurioje apibrėžta norma, t.y., funkcija $|\cdot|\colon X \to [0, \infty)$ su 5), 6) ir 7) savybėmis, vadinama *normuota* erdve. Bet kokia euklidinė erdvė tampa normuota, apibrėžus joje normą formule $|x| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$, nes 5), 6) ir 7) savybės įrodomos remiantis tik 1), 2) ir 3) savybėmis. Tačiau ne visada normą galima apibrėžti skaliarinės sandaugos pagalba. Tokių normų pavyzdžiai erdvėje $\mathbb{R}^k$: $|x| = \max_{1\leq i\leq k} |x_i|$, $|x| := \sum_{i=1}^k |x_i|$.

Analogiškos normos erdvėje $C[a,b]$: $|x| := \max_{t\in[a,b]}|x(t)|$, $|x| := \int_a^b |x(t)|\,dt$. Pirmoji yra dažniausiai naudojama erdvėje $C[a,b]$.

Aibė X, kurioje apibrėžtas atstumas, t.y., funkcija $d\colon X\times X\to[0,\infty)$, pasižyminti 1.4 apibrėžime nurodytomis savybėmis, vadinama *metrine erdve*. Nors mūsų nagrinėjimo objektas yra funkcijos erdvėje $\mathbb{R}^k$, daugelis teiginių yra teisingi bet kokiai metrinei erdvei (pavyzdžiui, erdvei $C[a,b]$ ir kitoms funkcijų erdvėms, nagrinėjamoms funkcinėje analizėje). Todėl:

Toliau teiginius formuluosime bet kokiai metrinei erdvei X su metrika d, išskirdami tuos atvejus, kai erdvės $\mathbb{R}^k$ specifika yra svarbi.

1.6. Apibrėžimas. *Atviruoju (uždaruoju) rutuliu* su centru $x\in X$ ir spinduliu $r>0$ vadinama aibė $U_r(x)=B(x,r):=\{y\in X : d(y,x)<r\}$ (atitinkamai $\overline{B}(x,r):=\{y\in X : d(y,x)\le r\}$). $U_r(x)$ dar vadinamas taško x *r-aplinka* arba (kai nesvarbi spindulio r skaitinė reikšmė) *rutuline aplinka.*

Taškas $x\in X$ vadinamas aibės $A\subset X$

a) *sąlyčio tašku*, jei $\forall\varepsilon>0,\ U_\varepsilon(x)\cap A\ne\emptyset$ (t.y., jei kiekvienoje taško x aplinkoje yra bent vienas aibės A taškas);

b) *ribiniu tašku*, jei $\forall\varepsilon>0,\ U_\varepsilon(x)\cap A\setminus\{x\}\ne\emptyset$ (t.y., jei kiekvienoje taško x aplinkoje yra bent vienas aibės A taškas, nelygus x);

c) *izoliuotu tašku*, jei $\exists\varepsilon>0 :\ U_\varepsilon(x)\cap A=\{x\}$ (t.y., jei taškas x tėra vienintelis aibės A taškas pakankamai mažoje jo aplinkoje).

Visų aibės A sąlyčio taškų aibė žymima $\overline{A}$ ir vadinama aibės A *uždariniu.* Visų aibės A ribinių taškų aibė žymima A' ir vadinama aibės A *išvestine.* [2]

1.7. Pavyzdžiai. 1) Visų pirma pastebėkime, kad $\overline{A}=A'\cup\{$*aibės A izoliuoti taškai*$\}$. Todėl, jei $A=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}\subset X$ – baigtinė aibė, tai $A'=\emptyset$, $\overline{A}=A$, nes visi tokios aibės A taškai yra izoliuoti. Iš tikrųjų, paėmę $\varepsilon=\min\limits_{i\ne j}d(x_i,x_j)>0$, su visais $x\in A$ gauname $U_\varepsilon(x)\cap A=\{x\}$.

2) Jei $A=\left\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}\subset X=\mathbb{R}$, tai $A'=\{0\}$ ir $\overline{A}=A\cup\{0\}$ (patikrinkite).

3) $\overline{(a,b)}=(a,b)'=[a,b]$ erdvėje $X=\mathbb{R}$ (patikrinkite!).

4) $\overline{B(x,r)}\subset\overline{B}(x,r)$; jei $X=\mathbb{R}^k$, tai $\overline{B(x,r)}=\overline{B}(x,r)$.

Įrodymas. Jei $y\in\overline{B(x,r)}$, tai $\forall\varepsilon>0,\ \exists z_\varepsilon\in U_\varepsilon(y)\cap B(x,r)$. Iš čia

$$\forall\varepsilon>0,\ d(y,x)\le d(y,z_\varepsilon)+d(z_\varepsilon,x)<\varepsilon+r \implies d(y,x)\le r \iff y\in\overline{B}(x,r),$$

[2] Aibės išvestinė neturi nieko bendro su funkcijos išvestine.

t.y. $\overline{B(x,r)} \subset \overline{B}(x,r)$.

Kai $X = \mathbb{R}^k$, imkime bet kokį tašką $y \in \overline{B}(x,r)$ ir nagrinėkime taškus $z_\lambda := \lambda x + (1-\lambda)y,\ \lambda \in (0,1)$ („intervalą“, jungiantį taškus x ir y). Šiems taškams

$$\begin{aligned} d(z_\lambda, x) &= |z_\lambda - x| = |(\lambda-1)x + (1-\lambda)y| = |(1-\lambda)(y-x)| \\ &= (1-\lambda)|(y-x)| \le (1-\lambda)r < r \implies z_\lambda \in B(x,r) \quad (\forall \lambda \in (0,1)). \end{aligned}$$

Antra vertus,

$$d(z_\lambda, y) = |z_\lambda - y| = |\lambda(x-y)| = \lambda|x-y| \le \lambda r.$$

Todėl $\forall \varepsilon > 0,\ d(z_\lambda, y) < \varepsilon$ (t.y. $z_\lambda \in U_\varepsilon(y)$), kai $\lambda < \frac{\varepsilon}{r}$. Taigi $\forall \varepsilon > 0,\ U_\varepsilon(y) \cap B(x,r) \ne \emptyset$, t.y. $y \in \overline{B(x,r)}$. Įsitikinome, kad $\overline{B}(x,r) \subset \overline{B(x,r)}$, taigi ir šių aibių lygybe. △

Pastaba. Pastebėsime, kad bendru atveju teturime $\overline{B(x,r)} \subset \overline{B}(x,r)$. Imkime, pavyzdžiui, $X = [0,\infty) \cup \{-1\}$ (su įprastiniu atstumu $d(x,y) = |x-y|$). Tada $\overline{B(0,1)} = \overline{[0,1)} = [0,1]$, bet $\overline{B}(0,1) = [0,1] \cup \{-1\} \ne \overline{B(0,1)}$.

1.8. Teiginys (Uždarinio savybės). *Su bet kokiomis aibėmis $A, B \subset X$*

1) $A \subset \overline{A}$;
2) $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$;
3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;
4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Nebūtinai $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Tuo galima įsitikinti paėmus, pavyzdžiui, $A = (0,1)$, $B = (1,2)$. Tada $\overline{A \cap B} = \emptyset \ne \overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$.

Įrodymas. 1) ir 2) savybės akivaizdžios.

3) Iš 1) savybės turime $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$. Įrodysim, kad $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. Imkime bet kokį $x \in \overline{\overline{A}}$ ir laisvai pasirinkime $\varepsilon > 0$. Pagal aibės uždarinio apibrėžimą $\exists y \in U_\varepsilon(x) \cap \overline{A}$. Pažymėkime $\varepsilon' := \varepsilon - d(y,x) > 0$. Tada $U_{\varepsilon'}(y) \subset U_\varepsilon(x)$. Iš tikrųjų,

$$\begin{aligned} z \in U_{\varepsilon'}(y) &\iff d(z,y) < \varepsilon' \implies d(z,x) \le d(z,y) + d(y,x) < \varepsilon' + d(x,y) = \varepsilon \\ &\implies z \in U_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Kadangi $y \in \overline{A}$, tai $\exists \tilde{y} \in U_{\varepsilon'}(y) \cap A \subset U_\varepsilon(x) \cap A$, t.y. $U_\varepsilon(x) \cap A \ne \emptyset$. Tai ir reiškia, kad $x \in \overline{A}$.

4) $\overline{A \cap B} \subset \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \subset \overline{A \cup B} \implies \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ ir $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Antra vertus,

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\implies \forall \varepsilon > 0,\ U_\varepsilon(x) \cap (A \cup B) = \big(U_\varepsilon(x) \cap A\big) \cup \big(U_\varepsilon(x) \cap B\big) \ne \emptyset \\ &\implies \forall \varepsilon > 0,\ (U_\varepsilon(x) \cap A) \ne \emptyset \vee (U_\varepsilon(x) \cap B) \ne \emptyset \\ &\implies x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B} \implies x \in \overline{A} \cup \overline{B}. \end{aligned}$$

Taigi $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. △

1.9. Apibrėžimas. Aibė $F \subset X$ vadinama *uždara*, jei $\overline{F} = F$, (t.y., jei jai priklauso visi jos ribiniai taškai).

1.10. Pavyzdžiai. 1) Bet kokios aibės $A \subset X$ uždarinys $\overline{A}$ – uždara aibė, nes, remiantis 1.8.3 savybe, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

2) Visos baigtinės aibės uždaros, nes jos neturi ribinių taškų (1.7.1 pavyzdys).

3) Uždarasis rutulys – uždara aibė. Įsitikinsime, kad rutulys $\overline{B}(x,r)$ neturi **jam nepriklausančių** ribinių taškų. Imkime bet kokį tašką $y \notin \overline{B}(x,r)$ ir pažymėkime $\varepsilon := d(y,x) - r > 0$. Tada

$$\begin{aligned} z \in U_\varepsilon(y) &\implies d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) < d(x,z) + \varepsilon \\ &\implies d(x,z) > d(y,x) - \varepsilon = r \implies z \notin \overline{B}(x,r). \end{aligned}$$

Tai reiškia, kad $U_\varepsilon(y) \cap \overline{B}(x,r) = \emptyset$ ir todėl $y \notin \overline{\overline{B}(x,r)}$.

4) Aibė

$$\begin{aligned} \bigtimes_{i=1}^{k} [a_i, b_i] &:= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k] \\ &= \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) : x_i \in [a_i, b_i],\ i = 1, \ldots, k\} \end{aligned}$$

vadinama k-mate *uždarąja gardele* arba k-mačiu *uždaruoju gretasieniu* (erdvėje $\mathbb{R}^k$). Tai – uždara aibė (patikrinama panašiai, kaip 3)-iajame pavyzdyje).

Kai $k = 1, 2, 3$, k-matė uždaroji gardelė yra atitinkamai uždarieji intervalas, stačiakampis ir stačiakampis gretasienis.

1.11. Teiginys (Uždarųjų aibių savybės).

1) Bet kokios uždarųjų aibių sistemos $\{F_\alpha, \alpha \in I\}$ sankirta $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha$ – uždaroji aibė.

2) Baigtinės uždarųjų aibių sistemos $\{F_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ sąjunga $\bigcup_{i=1}^n F_i$ – uždaroji aibė.

Pastaba. Antroje savybėje sistemos baigtinumas – esminė sąlyga. Pavyzdžiui, $\bigcup_{n\ge 2} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] = (-1, 1)$.

Teiginio įrodymas. 1) Turime

$$\begin{aligned} x \in \overline{\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha} &\implies \forall\varepsilon > 0,\ U_\varepsilon(x) \bigcap \Big(\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha\Big) \ne \emptyset \\ &\implies \forall\varepsilon > 0,\ \bigcap_{\alpha\in I} \Big(U_\varepsilon(x) \bigcap F_\alpha\Big) \ne \emptyset \\ &\implies \forall\alpha \in I,\ \forall\varepsilon > 0,\ U_\varepsilon(x) \bigcap F_\alpha \ne \emptyset \\ &\implies \forall\alpha \in I,\ x \in \overline{F_\alpha} = F_\alpha \implies x \in \bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha. \end{aligned}$$

Gavome, kad $\overline{\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha} \subset \bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha$ ir todėl šios aibės lygios (nes visada $A \subset \overline{A}$). Taigi $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha$ yra uždara.

2) Pasinaudoję 1.8.4 savybe, gauname

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} F_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{F_i} = \bigcup_{i=1}^{n} F_i.$$

△

1.12. Apibrėžimas. Taškas x vadinamas aibės $A \subset X$ *vidiniu* tašku, jei $\exists\,\varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset A$, t.y., jei x priklauso aibei A kartu su savo (pakankamai maža) aplinka. Visų aibės A vidinių taškų aibė vadinama aibės A *vidumi*. Ją žymėsime $\mathring{A}$.

Aibė G vadinama *atvirąja*, jei $\mathring{G} = G$, t.y., jei visi jos taškai yra vidiniai.

1.13. Pavyzdžiai. 1) $\emptyset$ ir visa metrinė erdvė X – atviros aibės.

2) Atvirasis rutulys $B(x,r)$ – atvira aibė. Iš tikrųjų, paėmę bet kokį $y \in B(x,r)$, pažymėkime $\varepsilon := r - d(x,y) > 0$. Tada

$$\begin{aligned} z \in U_\varepsilon(y) &\implies d(z,y) < \varepsilon \implies d(z,x) \le d(z,y) + d(y,x) < \varepsilon + d(y,x) = r \\ &\implies z \in B(x,r). \end{aligned}$$

Taigi $U_\varepsilon(y) \subset B(x,r)$. △

3) k-matė *atviroji gardelė*

$$\bigtimes_{i=1}^{k} (a_i, b_i) = (a_1,b_1) \times (a_2,b_2) \times \cdots \times (a_k,b_k)$$

yra atviroji aibė (patikrinkite savarankiškai).

1.14. Teiginys. *Aibė $G \subset X$ yra atvira tada ir tik tada, kai aibė $F := G^c = X\backslash G$ yra uždara.*

Įrodymas. Būtinumas. Tarkime, kad G yra atviroji aibė. Tada

$$\begin{aligned} x \in \overline{F} &\implies \forall\varepsilon > 0,\ U_\varepsilon(x) \cap F \ne \emptyset \implies \forall\varepsilon > 0,\ U_\varepsilon(x) \not\subset G \\ &\implies x \notin \mathring{G} = G \implies x \in F \end{aligned}$$

Taigi $\overline{F} \subset F$ ir todėl aibė F yra uždara.

Pakankamumas. Tarkime, kad F yra uždaroji aibė. Tada

$$\begin{aligned} x \in G &\implies x \notin F = \overline{F} \implies \exists\varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap F = \emptyset \implies \exists\varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset G \\ &\implies x \in \mathring{G}. \end{aligned}$$

Taigi $G \subset \mathring{G}$ ir todėl aibė G yra atvira. △

1.15. Išvada (Atvirųjų aibių savybės)..

1) Bet kokios atvirųjų aibių sistemos $\{G_\alpha, \alpha \in I\}$ *sąjunga* $\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$ *– atviroji aibė.*

2) Baigtinės atvirųjų aibių sistemos $\{G_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ *sankirta* $\bigcap_{i=1}^n G_i$ *– atviroji aibė.*

Įrodymas. 1) Pasinaudokime lygybe

$$\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha = \Big(\bigcap_{\alpha\in I} G_\alpha^c\Big)^c$$

ir 1.11.1 bei 1.14 teiginiais .

2) Įrodymas analogiškas. △

1.16. Apibrėžimas. Atvirųjų aibių sistema $\{G_\alpha,\ \alpha \in I\}$ vadinama aibės A *atviruoju denginiu*, jei $\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha \supset A$. Aibė $K \subset X$ vadinama *kompaktiška aibe* arba *kompaktu*, jei kiekvienas jos atvirasis denginys $\{G_\alpha,\ \alpha \in I\}$ turi baigtinį podangį (t.y. $\exists\, k \in \mathbb{N}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in I :$ $\bigcup_{i=1}^k G_{\alpha_i} \supset K$).

Aibė $A \subset X$ vadinama *aprėžta*, jei egzistuoja rutulys $B(x, r) \supset A$.

1.17. Teiginys (Kompaktiškųjų aibių savybės). *1) Kiekvienas kompaktas* K *– uždara ir aprėžta aibė.*

2) Kompakto K *uždaras poaibis* F *– kompaktas.*

3) Kompakto K *ir uždaros aibės* F *sankirta* $K \cap F$ *– kompaktas.*

4) Įjungtųjų netuščių kompaktų sekos $\{K_n\}$ *(*$K_n \supset K_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$*) sankirta yra netuščia aibė.*

5) Kiekvienas begalinis kompakto poaibis turi bent vieną ribinį tašką (priklausantį tam kompaktui).

Įrodymas. 1) *Aprėžtumas.* Kadangi $\bigcup\limits_{r>0} B(x, r) = X \supset K$, tai

$$\exists\, r_1, r_2, \ldots, r_n : \bigcup_{i=1}^n B(x, r_i) \supset K.$$

Pažymėkime $r := \max r_i$. Tada $B(x, r) = \bigcup\limits_{i=1}^n B(x, r_i) \supset K$.

Uždarumas. Tarkime, kad $x \notin K$. Su kiekvienu $y \in K$ pažymėkime $\varepsilon_y := d(x, y)/3 > 0$. Tada $B(x, \varepsilon_y) \cap B(y, \varepsilon_y) = \emptyset,\ y \in K$. Kadangi $\bigcup\limits_{y\in K} B(y, \varepsilon_y) \supset K$, tai

$$\exists\, y_1, y_2, \ldots, y_n : \bigcup_{i=1}^n B(y_i, \varepsilon_{y_i}) \supset K.$$

Pažymėkime $\varepsilon := \min \varepsilon_{y_i} > 0$. Tada $B(x,\varepsilon) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B(x,\varepsilon_{y_i})$. Kadangi

$$B(x,\varepsilon) \cap K \subset B(x,\varepsilon) \bigcap \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i,\varepsilon_{y_i}) = \bigcup_{i=1}^{n} \big(B(x,\varepsilon) \cap B(y_i,\varepsilon_{y_i})\big) = \emptyset,$$

tai ir $B(x,\varepsilon) \cap K = \emptyset$. Tai reiškia, kad x nėra aibės K ribinis taškas, t.y. aibė K neturi jai nepriklausančių ribinių taškų.

2) Imkime bet kokį aibės F atvirąjį denginį $\{G_\alpha,\ \alpha \in I\}$. Tada $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \cup (X \backslash F) \supset F \cup (X \backslash F) = X \supset K$ – gavome aibės K atvirąjį denginį. Todėl $\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n : \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \cup (X \backslash F) \supset K \supset F$. Kadangi $(X \backslash F) \cap F = \emptyset$, tai ir $\bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \supset F$.

3) Remiantis 1) ir 2) savybėmis uždaroji aibė $K \cap F \subset K$ yra kompaktas.

4) Tarkime priešingai, kad $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$. Pažymėkime $G_n := X \backslash K_n$. Kadangi G_n – atvirosios aibės ir $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = X \backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = X \supset K_1$, tai $\exists n_1 < n_2 < \cdots < n_m$: $\bigcup_{i=1}^{m} G_n = G_{n_m} \supset K_1$. Iš čia $K_{n_m} \cap K_1 = K_{n_m} = \emptyset$ – gavome prieštarą.

5) Tarkime, kad begalinis kompakto K poaibis A neturi ribinių taškų. Tada su visais $x \in K$ galima rasti tokius $\varepsilon_x > 0$, kad $U_{\varepsilon_x}(x) \cap A \backslash \{x\} = \emptyset$. Pažymėkime $U(x) := U_{\varepsilon_x}(x)$. Kadangi $\bigcup_{x \in K} U(x) \supset K$, tai $\exists\, x_1, x_2, \ldots, x_n$: $\bigcup_{i=1}^{n} U(x_i) \supset K \supset A$. Kita vertus, $U(x_i) \cap A \subset \{x_i\}$ ir todėl $A \subset \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ yra baigtinė aibė – prieštara! △

1.18. Teiginys. *k-matė uždaroji gardelė*

$$\bigtimes_{i=1}^{k} [a_i, b_i] := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k]$$

yra kompaktiška aibė erdvėje $\mathbb{R}^k$.

Įrodymas. Žymėjimams supaprastinti teiginį įrodysime tik dvimačiu atveju ($k = 2$). Tarkime, kad dvimatė gardelė (stačiakampis) $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ nėra kompaktiška aibė. Tada egzistuoja jos atvirasis denginys $\{G_\alpha\}$, iš kurio negalima išrinkti atvirojo podangio. Padalinkime stačiakampį I į 4 lygius stačiakampius. Bent vienas iš jų negali būti padengtas baigtiniu aibių iš $\{G_\alpha\}$ skaičiumi (priešingu atveju, apjungę tuos 4 stačiakampius dengiančius baigtinius podangius, gautume baigtinį podangį stačiakampiui I). Pažymėkimę jį I^1 ir vėl padalinkime į 4 lygias dalis ir t.t. Tęsdami gausime stačiakampių seką $\{I^n\}$, pasižyminčią šiomis savybėmis:

a) $I^n \supset I^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$;

b) jei $x, y \in I^n$, tai $d(x,y) \le 2^{-k}\delta$, kur $\delta := d(a,b)$ – atstumas tarp stačiakampio I priešingų viršūnių $a = (a_1, a_2)$ ir $b = (b_1, b_2)$;

c) nei vieno iš stačiakampių I^n negalima padengti baigtiniu aibių iš $\{G_\alpha\}$ skaičiumi .

Kartu su stačiakampių seka $\{I^n\}$, įjungtąsias sekas sudaro ir jų „kraštinių“ sekos $\{[a_1^n, b_1^n]\}$ bei $\{[a_2^n, b_2^n]\}$. Remiantis Kantoro įjungtųjų intervalų principu, egzistuoja $x_1 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_1^n, b_1^n]$ ir $x_2 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_2^n, b_2^n]$. Tada $x := (x_1, x_2) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n$. Iš atvirojo denginio

$\{G_\alpha\}$ paimkime aibę G_{α_0}, kuriai priklauso taškas x. Dėl aibės G_{α_0} atvirumo $\exists\varepsilon > 0 :$ $U_\varepsilon(x) \subset G_{\alpha_0}$. Parinkę tokį n, kad $2^{-n}\delta < \varepsilon$, remdamiesi b) savybe, turime $I^n \subset U_\varepsilon(x) \subset G_{\alpha_0}$. Taigi stačiakampį I^n galima padengti viena aibe iš atvirojo denginio $\{G_\alpha\}$ – tai prieštarauja c) savybei. $\triangle$

1.19. Išvados. 1) *Aibė* $A \subset \mathbb{R}^k$ *yra kompaktiška tada ir tik tada, kai ji yra uždara ir aprėžta.*

2) (*Vejerštraso teorema*) *Kiekviena aprėžta begalinė aibė* $A \subset \mathbb{R}^k$ *turi bent vieną ribinį tašką.*

Šie teiginiai nėra teisingi bet kokios metrinės erdvės X atveju. Pavyzdžiui, $\overline{B}(x,r)$ nėra kompaktiška aibė erdvėje $C[a,b]$, o aprėžta funkcijų aibė $\{x_n(t) := t^n,\ t \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}\}$ erdvėje $C[0,1]$ neturi ribinių taškų (pabandykite tuo įsitikinti).

Įrodymas. 1) Būtinumas jau įrodytas (1.17.1 teiginys). Pakankamumu įsitikiname patalpindami aibę A pakankamai didelėje k-matėje uždarojoje gardelėje I (tai įmanoma dėl jos aprėžtumo) ir pasinaudodami 1.17.2 teiginiu.

2) Įrodymas – praktiškai toks pats kaip vienamačiu atveju. Tarkime, kad aibė A neturi ribinio taško. Patalpinę ją (pakankamai didelėje) k-matėje uždarojoje gardelėje I, kuri, remiantis pirmąja dalimi, yra kompaktiška. Tada kiekvienam taškui $x \in K$ atsiras toks $\varepsilon_x > 0$, kad $U_{\varepsilon_x}(x) \cap A \subset \{x\}$. Pažymėkime $U(x) := U_{\varepsilon_x}(x)$. Kadangi $\bigcup_{x\in K} U(x) \supset K$, tai atsiras tokie $x^1, x^2, \ldots, x^m$, kad $\bigcup_{i=1}^m U(x^i) \supset K \supset A$. Todėl

$$A = \bigcup_{i=1}^m U(x_i) \cap A = \bigcup_{i=1}^m \big(U(x^i) \cap A\big) \subset \bigcup_{i=1}^m \{x^i\} = \{x^1, x^2, \ldots, x^m\},$$

t.y. A – baigtinė aibė, ir gavome prieštarą. $\triangle$

1.20. Apibrėžimas. Sakysime, kad seka $\{x^n\} = \{x^n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset X$ turi ribą $x \in X$ (arba konverguoja į x, arba artėja prie x), jei $d(x^n, x) \to 0$, $n \to \infty$, t.y., jei

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : d(x^n, x) < \varepsilon,\ \text{kai } n > N.$$

Tokiu atveju rašysime: $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = x$, arba $x^n \to x$, $n \to \infty$.

Sakoma, kad seka $\{x^n\}$ yra Koši seka erdvėje X, jei

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : d(x^n, x^m) < \varepsilon,\ \text{kai } n, m > N.$$

Metrinė erdvė X vadinama pilna, jei kiekviena jos elementų Koši seka konverguoja (į kokį nors erdvės X elementą).[3]

---

[3] Kitaip tariant, jei toje erdvėje galioja sekų konvergavimo Koši kriterijus.

1.21. Teiginys. *1) Tarkime, kad* $\{x^n\} \subset \mathbb{R}^k$. *Tada*

(a) $\mathbb{R}^k \ni x^n \to x,\ n \to \infty \iff x_i^n \to x_i,\ i = 1, \ldots, k.$

(b) $\{x^n\} \subset \mathbb{R}^k$ *– Koši seka* $\iff \forall\, i,\ \{x_i^n\} \subset \mathbb{R}^k$ *– Koši seka;*

(c) *seka* $\{x^n\} \subset \mathbb{R}^k$ *aprėžta* $\iff \forall\, i$, *seka* $\{x_i^n\} \subset \mathbb{R}^k$ *aprėžta;*

2) (Koši kriterijus) Erdvė $\mathbb{R}^k$ *– pilna metrinė erdvė;*

3) Aibė $F \subset X$ *yra uždara tada ir tik tada, kai su kiekviena konverguojančia seka* $\{x^n\} \subset F$ *jos riba* $\lim\limits_{n\to\infty} x^n \in F$.

Įrodymas. 1) Visų trys savybės akivaizdžiai išplaukia iš nelygybės

$$|x_i - y_i| \le d(x, y) = \Big(\sum_{j=1}^{k} (x_j - y_j)^2\Big)^{1/2}, \qquad i = 1, \ldots, k,$$

teisingos su visais $x, y \in \mathbb{R}^k$.

2) išplaukia iš pirmosios teiginio dalies savybių. Iš tikrųjų, jei $\{x^n\} \subset \mathbb{R}^k$ – Koši seka, tai ((b) savybė) su visais $i = 1, \ldots, k$ *skaičių* sekos $\{x_i^n\}$ yra Koši sekos ir todėl, remiantis *skaičių* sekų konvergavimo Koši kriterijumi, konverguoja. i kokį nors elementą x_i. Tada ((a) savybė) $x^n \to x := (x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

4) *Būtinumas.* Imkime bet kokią konverguojančią seką $\{x^n\} \subset F$ ir pažymėkime $x = \lim\limits_{n\to\infty} x^n$ Su bet kokiu $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $N \in \mathbb{N}$, kad $x^n \in U_\varepsilon(x)$, kai $n \ge N$, t.y. $x^n \in U_\varepsilon(x) \cap F$, kai $n \ge N$. Taigi $\forall\, \varepsilon > 0,\ U_\varepsilon(x) \cap F \ne \emptyset \implies x \in \overline{F} = F$.

Pakankamumas. Imkime bet kokį tašką $x \in \overline{F}$. Su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$ aibė $U_{\frac{1}{n}}(x) \cap F \ne \emptyset$. Todėl su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$ atsiras bent vienas taškas $x^n \in U_{\frac{1}{n}}(x) \cap F$. Tada $\{x^n\} \subset F$ ir $d(x^n, x) < \frac{1}{n} \to 0$, t.y. $x = \lim\limits_{n\to\infty} x^n$. Pagal prielaidą $x \in F$. Taigi $\overline{F} \subset F$ ir todėl F – uždara aibė. △