Matematinės analizės konspektai
(be įrodymų)

Marius Gedminas
pagal V. Mackevičiaus paskaitas

1998 m. rudens semestras (I kursas)

1 Realieji skaičiai

Apibrėžimas 1.1 Uždarųjų intervalų seka $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$ vadinama įdėtųjų uždarųjų intervalų seka, jei $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$.

Teiginys 1.2 (Įdėtųjų intervalų principas (aksioma)) Bet kokios įdėtųjų uždarųjų intervalų sekos sankirta – netuščia aibė ($\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}, c \in [a_n, b_n]$).

Pastaba Vien racionaliesiems skaičiams šis principas neteisingas. Pvz.,

$$[1.4, 1.5] \supset [1.41, 1.42] \supset \ldots$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\sqrt{2}\} \notin \mathbb{Q}$$

Pastaba Intervalų uždarumas yra svarbus dalykas. Pvz.,

$$(0, \tfrac{1}{n+1}) \in \left(0, \tfrac{1}{n}\right), \text{ bet } \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \tfrac{1}{n}\right) = \varnothing$$

Apibrėžimas 1.3 Aibė $A \subset \mathbb{R}$ vadinama aprėžta iš viršaus, jei $\exists c \in \mathbb{R}$ toks, kad $\forall x \in A, x \leqslant c$. c vadinamas aibės viršutiniu rėžiu. Aibės $A \subset \mathbb{R}$ mažiausias viršutinis rėžis, jei jis egzistuoja, vadinamas aibės A tiksliuoju viršutiniu rėžiu ir žymimas $\sup A$ ("supremum A").

Aibė $A \subset \mathbb{R}$ vadinama aprėžta iš apačios, jei $\exists c \in \mathbb{R}$ toks, kad $\forall x \in A, x \geqslant c$. c vadinamas aibės apatiniu rėžiu. Aibės $A \subset \mathbb{R}$ mažiausias apatinis rėžis, jei jis egzistuoja, vadinamas aibės A tiksliuoju apatiniu rėžiu ir žymimas $\inf A$ ("infimum A").

Teorema 1.4 (Tiksliųjų rėžių egzistavimas) Kiekviena netuščia aprėžta iš viršaus (apačios) aibė $A \subset \mathbb{R}$ turi tikslųjį viršutinį (apatinį) rėžį.

Pastaba 1.5 Susitarsime rašyti $\sup A = +\infty$ $(\inf A = -\infty)$, jei A nėra aprėžta iš viršaus (apačios).

Teorema 1.6 (Borelio-Lebego teorema apie baigtinį denginį) Jei atvirųjų intervalų sistema $\{\mathcal{G}_\alpha : \alpha \in I\}$ dengia intervalą $[a, b]$ (t.y. $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{G}_\alpha \supset [a, b]$), tai egzistuoja posistemis $\{\mathcal{G}_{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{G}_{\alpha_r}\}$, taip pat dengiantis šį intervalą.

Pastaba Tiek atvirųjų intervalų sistema, tiek uždaras intervalas yra būtini dalykai teoremoje ir jų negalima atsisakyti. Pvz.,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1 - \tfrac{1}{n}] \cup [1, 2] \supset [0, 2],$$

bet iš gautos sistemos negalime išrinkti baigtinio posistemio, kuris dengtų intervalą $[0, 2]$.

2 Sekos riba

Apibrėžimas 2.1 Sakoma, kad seka (x_n) turi ribą $x \in \mathbb{R}$, jei su visais ("kiek norima mažais") $\varepsilon > 0$ atsiras $N \in \mathbb{N}$, kad $|x_n - x| < \varepsilon$, kai $n > N$ ("x_n yra kiek norima arti x su pakankamai dideliais n"). Tokiu atveju žymima

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

$$\lim_n x_n = x$$

$$\lim x_n = x$$

$$x_n \to x, n \to \infty$$

Pastaba Vietoje $N \in \mathbb{N}$ galime imti $N \in \mathbb{R}$.

Pavyzdžiai 2.2

1. $x_n = \dfrac{1}{n}$, $\lim x_n = 0$

1' $x_n = \dfrac{1}{n^3 + 5n^2 + 7n + 2}$, $\lim x_n = 0$

2. $x_n = \dfrac{19\sin n - 98\cos^3 n}{\sqrt{n}}$, $\lim x_n = 0$

3. $x_n = \sqrt{n}$. Seka diverguoja (neturi baigtinės ribos)

4. $x_n = (-1)^n$. Seka diverguoja (neturi ribos)

5. $\{[a_n, b_n]\}$ – įdėtųjų uždarųjų intervalų seka, $b_n - a_n \to 0$, kai $n \to \infty$. Remiantis įdėtųjų intervalų principu, $\exists c \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Tada $\lim a_n = \lim b_n = c$

Apibrėžimas 2.3 Skaičių seka (x_n) vadinama aprėžta (aprėžta iš viršaus, aprėžta iš apačios), jei $\exists M \in \mathbb{R} : |x_n| \leqslant M, n \in \mathbb{N})$ (atitinkamai $x_n \leqslant M, n \in \mathbb{N}$, $x_n \geqslant M, n \in \mathbb{N}$).

Teiginiai 2.4

1. Kiekviena konverguojanti seka yra aprėžta.

2. Seka gali turėti ne daugiau kaip vieną ribą.

Teorema 2.5 (Veiksmai su ribomis) Tarkime, kad $\lim x_n = x$ ir $\lim y_n = y$. Tada

1. $\lim(x_n + y_n) = x + y$

2. $\lim(x_n \cdot y_n) = x \cdot y$

3. Jei $y \neq 0$, tai $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{x}{y}$

Teiginys 2.6 (Perėjimas prie ribos nelygybėse)

1. Jei $x_n \to x$, $y_n \to y$ ir $x < y$, tai $\exists N \in \mathbb{N} : x_n < y_n$, kai $n > N$.
   Atskiru atveju, jei $y_n \to y$ ir $y > 0$, tai $\exists N \in \mathbb{N} : y_n > 0$, kai $n > N$.

2. Jei $x_n \leqslant y_n$, $n \in \mathbb{N}$ ir $x_n \to x$, $y_n \to y$, tai $x \leqslant y$

3. (Dviejų policininkų principas) Jei $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ ir $x_n \to x$, $y_n \to x$, tai $z_n \to x$.

Pavyzdžiai 2.7

1. Iš $x_n < y_n$, $x_n \to x$, $y_n \to y$ neišplaukia $x < y$! Pvz., $\forall n : 0 < \frac{1}{n}$. Tada $x = \lim x_n = y = \lim y_n = 0$.

2.
$$z_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}, n \in \mathbb{N}$$
.
$$1 \leftarrow \frac{n}{n+1} = \frac{n}{\sqrt{n^2+2n+1}} \leqslant z_n \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2}} = 1 \to 1$$

Taigi, $z_n \to 1$.

Apibrėžimas 2.8 Sakykime, turim seką (x_n). Imkime didėjančią natūraliųjų skaičių seką (n_k), $k \in \mathbb{N}$. Tada seka (x_{n_k}) vadinama sekos (x_n) posekiu (arba daline seka). Jei sekos (x_n) posekis turi ribą x, tai x vadinama sekos (x_n) daline riba.

Pastaba Jei seka (x_n) turi ribą x, tai visi jos posekiai turi tą pačią ribą.

Teiginys 2.9 (Vejerštraso teorema apie konverguojantį posekį) Kiekviena aprėžta seka turi konverguojantį posekį.

Teorema 2.10 (Sekos konvergavimo Koši kriterijus) Tarkime, turime seką (x_n). Tada šie du teiginiai ekvivalentūs:

1. Seka (x_n) konverguoja
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : |x_n - x_m| < \varepsilon$, kai $n, m > N$

Pastabos

1. Sekos (x_n), pasižyminčios antra savybe, vadinamos fundamentaliosiomis arba Koši sekomis. Erdvės, kuriose kiekviena Koši seka konverguoja, vadinamos pilnomis. Taigi, ši teorema teigia, kad $\mathbb{R}$ yra pilna erdvė.
2. Antrasis teiginys dažnai užrašomas taip:
$$|x_n - x_m| \to 0, \text{ kai } n, m \to \infty$$

Pavyzdžiai 2.11

1. $x_n = \frac{\cos 1}{2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{2^3} + \cdots + \frac{\cos n}{2^n}, n \in \mathbb{N}$ Seka turi ribą remiantis Koši kriterijumi.
2. $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$. Seka diverguoja.
3. $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Seka diverguoja.

Apibrėžimas 2.12 Seką (x_n) vadinsime

1. didėjančia, jei $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} \geqslant x_n$.
2. griežtai didėjančia, jei $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} > x_n$.
3. mažėjančia, jei $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} \leqslant x_n$.
4. griežtai mažėjančia, jei $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} < x_n$.

Teiginys 2.13 Didėjanti (mažėjanti) seka (x_n) konverguoja tada, ir tik tada, kai ji yra aprėžta iš viršaus (apačios). Tokiu atveju $\lim x_n = \sup\{x_n\}$ ($\inf\{x_n\}$).

Pavyzdžiai 2.14

1. $x_n = \dfrac{n}{q^n}, \qquad |q| > 1$. $\lim x_n = 0$.
2. $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

2’ $\lim \sqrt[n]{a} = 1, \qquad a > 0$

3. $\lim \dfrac{q^n}{n!} = 0, \qquad q \in \mathbb{R}$

4. $\lim \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$

Apibrėžimas 2.15 Išplėstine realiųjų skaičių tiese vadiname aibę $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ su tokiais papildomais sąryšiais:

1. $-\infty < x < +\infty, \qquad x \in \mathbb{R}$
2. $x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty, \qquad x \in \mathbb{R}$
3. $x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \begin{cases} \pm\infty & x > 0 \\ \mp\infty & x < 0 \end{cases}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Apibrėžimas 2.16 Turime seką (x_n). Sakysime, kad

1. $\lim x_n = +\infty$, jei $\forall \Delta \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N}$, toks, kad $x_n > \Delta$, kai $n > N$.
2. $\lim x_n = -\infty$, jei $\forall \Delta \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N}$, toks, kad $x_n < \Delta$, kai $n > N$.
3. $\lim x_n = \infty$, jei $\lim |x_n| = +\infty$.

Pastabos 2.17

1. Baigtinių ir begalinių ribų apibrėžimus galima unifikuoti naudojant taško aplinkos sąvoką.
   Taško $x \in \mathbb{R}$ ε-aplinka vadinamas intervalas $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Ji žymima $U_\varepsilon(x)$. $y \in U_\varepsilon(x) \iff |y-x| < \varepsilon$.
   Taško $+\infty$ Δ-aplinka vadinamas intervalas $(\Delta, +\infty]$. Žymima $U_\Delta(+\infty)$.
   Taško $-\infty$ Δ-aplinka vadinamas intervalas $[-\infty, \Delta)$. Žymima $U_\Delta(-\infty)$.
   Tada $\lim x_n = x \quad \iff \quad \forall U(x) \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad x_n \in U(x)$, kai $n > N$.
2. Monotoniška seka išplėstinėje realiųjų skaičių tiesėje visada turi ribą (baigtinę arba begalinę).
3. Dalinės ribos sąvoka turi pramę ir begalinių ribų atveju. Todėl tiesėje $\overline{\mathbb{R}}$ bet kokia seka turi bent vieną dalinę ribą.

Teiginys 2.18 Turime sekas (x_n) ir (y_n), $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Tada

1. Jei $x_n \to +\infty$ ir $y_n \geqslant c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tai $x_n + y_n \to +\infty$.
   Atskiru atveju, jei $x_n \to +\infty$ ir $y_n \to y \in \mathbb{R}$ (arba $y = +\infty$), tai $x_n + y_n \to +\infty$.

1' Jei $x_n \to -\infty$ ir $y_n \leqslant c \in \mathbb{R}$, tai $x_n + y_n \to -\infty$.

2. a) Jei $x_n > 0$, tai $\lim x_n = +\infty$ tada, ir tik tada, kai $\lim \frac{1}{x_n} = 0$.
   b) Jei $x_n < 0$, tai $\lim x_n = -\infty$ tada, ir tik tada, kai $\lim \frac{1}{x_n} = 0$.
3. Jei $x_n \to +\infty$ ir $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leqslant y_n$, tai $y_n \to +\infty$.

Apibrėžimas 2.19 Sekos (x_n), $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$, apatine ir viršutine ribomis vadinami skaičiai

$$i = \lim_{n\to\infty} \inf_{k \geqslant n} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$$

ir

$$s = \lim_{n\to\infty} \sup_{k \geqslant n} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$$

Žymima:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = i$$

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = s$$

Apatinė ir viršutinė ribos visada egzistuoja, nes sekos $i_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ ir $s_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ yra monotoniškos.

Pavyzdžiai 2.20

1. $x_n = (-1)^n$. $\liminf x_n = -1$, $\limsup x_n = 1$.
2. $x_n = (-1)^n \cdot n$. $\liminf x_n = -\infty$, $\limsup x_n = +\infty$.
3. $x_n = n^{(-1)^n}$. $\liminf x_n = 0$, $\limsup x_n = +\infty$.
4. $x_n = n$. $\liminf x_n = +\infty$, $\limsup x_n = +\infty$.

Teiginys 2.21 Apatinė ir viršutinė sekos ribos yra lygios mažiausiai ir didžiausiai tos sekos dalinėms riboms

Išvada 2.22 Seka (x_n) turi ribą tada, ir tik tada, kai $\liminf x_n = \limsup x_n$. Tokiu atveju $\lim x_n = \liminf x_n = \limsup x_n$.

3 Skaičių eilutės

Apibrėžimas 3.1 Skaičių eilute vadinamas reiškinys

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots, \qquad \forall n \quad a_n \in \mathbb{R}$$

Sekos (a_n) nariai vadinami eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nariais.
Skaičiai $S_N := \sum_{n=1}^{N} a_n$, $N \in \mathbb{N}$ vadinami eilutės dalinėmis sumomis.
Jei $\exists S := \lim_{N\to\infty} S_N$, tai S vadinamas eilutės suma ir rašoma

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Jei $S \in \mathbb{R}$ (t.y. suma baigtinė), tai sakoma, kad eilutės suma konverguoja, priešingu atveju (kai suma begalinė arba neegzistuoja) – diverguoja

Teiginiai 3.2

1. (Eilučių konvergavimo Koši kriterijus)
   Eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja tada, ir tik tada, kai
   $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{n=N+1}^{M} a_n \right| < \varepsilon \quad \text{kai } M > N > N_0$$
2. (Būtinoji eilutės konvergavimo sąlyga)
   Jei eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja, tai $a_n \to 0, \quad n \to \infty$.
3. Jei $a_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, tai $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja tada, ir tik tada, kai jos dalinių sumų seka (S_N) yra aprėžta.

Pastaba 3.3 Jei $a_n \geqslant 0$, tai eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ visada turi sumą – baigtinę arba begalinę $(+\infty)$, todėl eilutei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ su $a_n \geqslant 0$ prasminga rašyti $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, kai ji konverguoja, ir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, kai ji diverguoja.

Pavyzdžiai 3.4

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{kai } |x| < 1 \\ +\infty & \text{kai } x \geqslant 1 \\ \text{neapibrėžta} & \text{kai } x \leqslant -1 \end{cases}$$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ diverguoja.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (diverguoja).

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant 2$ (konverguoja).

Teiginiai 3.5 (Eilučių palyginimas)

1. Jei $|a_n| \leqslant c_n$, $n \in \mathbb{N}$ ir $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty$, tai $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja.
2. Jei $0 \leqslant d_n \leqslant a_n$, $n \in \mathbb{N}$ ir $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = +\infty$, tai $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ (diverguoja).
3. Tarkime, kad $a_n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$ ir $\exists \alpha := \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in [0, +\infty]$.
   Jei $\alpha < +\infty$ ir $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$, tai $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.
   Jei $\alpha > 0$ ir $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$, tai $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.
   Kitaip tariant, jei $\alpha \in (0, +\infty)$, tai $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ir $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ arba abi konverguoja, arba abi diverguoja.

Lema 3.6 Tarkime, $a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$. Tokiu atveju $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ tada, ir tik tada, kai $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} < +\infty$.

Pavyzdžiai 3.7

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < +\infty \quad \iff \quad p > 1$

2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n} < +\infty \quad \iff \quad p > 1$

   $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln^p \ln n} < +\infty \quad \iff \quad p > 1$

Teiginys 3.8

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

Teiginys 3.9 (Eilutės konvergavimo Koši požymis) Bet kokiai eilutei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pažymėsime $\alpha := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

1. Jei $\alpha < 1$, tai eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja;
2. Jei $\alpha > 1$, tai eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguoja;
3. Yra tiek konverguojančių, tiek diverguojančių eilučių, kurioms $\alpha = 1$.

Teiginys 3.10 (Eilutės konvergavimo Dalambero požymis) Sakykime, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yra eilutė su $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Jei $\alpha := \limsup \left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| < 1$, tai eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja;
2. Jei $\exists N \in \mathbb{N}$ $\quad \left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| \geqslant 1$, kai $n > N$, tai eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguoja (tam pakanka $\liminf \left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| > 1$);
3. Yra tiek konverguojančių, tiek diverguojančių eilučių, kurioms $\lim \left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| = 1$.

Pavyzdžiai 3.11

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konverguoja (Dalamberas arba Koši).

2. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots$ konverguoja (Koši; Dalamberas atsakymo neduoda).

Pastaba Koši požymis stipresnis: jei Koši požymis neduoda atsakymo, tai neduos ir Dalambero.

Teiginys 3.12 (Eilutės konvergavimo Abelio-Dirichlė požymis) Tarkime, kad a) eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dalinių sumų seka yra aprėžta:

$$|A_n| \leqslant M, \quad n \in \mathbb{N}, \quad M < +\infty$$

b) $b_n \geqslant b_n - 1 \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, c) $\lim b_n = 0$. Tada eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguoja.

Pastabos

1. Kai išpildytos sąlygos b) ir c), dažnai sakoma, kad b_n monotoniškai artėja į nulį (žymima $b_n \downarrow 0$ arba $\lim_{n\to\infty} \downarrow b_n = 0$).
2. Yra prasmė naudoti ši požymį tik tada, kai a_n nariai įgyja skirtingus ženklus be galo daug kartų.

Išvada 3.13 (Leibnico teorema) Jei $b_n \downarrow 0$, $n \to \infty$, tai eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} b_n$ konverguoja.

Pavyzdžiai 3.14

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ konverguoja, kai $x \in [-1, 1)$ (Dalambero požymis, kai $|x| \neq 1$, Leibnico teorema, kai $x = -1$, harmoninė eilutė, kai $x = 1$).
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{4}}{\ln(n+1)}$ konverguoja (Abelio-Dirichlė požymis).

Apibrėžimas 3.15 Sakoma, kad eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja absoliučiai, jei $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$.
Jei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja, o $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$, tai sakoma, kad eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja reliatyviai.

Teiginys 3.16 Jei eilutė konverguoja absoliučiai, tai ji konverguoja.

Apibrėžimas 3.17 Dviejų eilučių $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ir $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sandauga vadinama eilutė $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, kurioje $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$.

Teorema 3.18 (Mertenso teorema) Jei $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$, $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \in \mathbb{R}$ ir bent viena iš šių eilučių konverguoja absoliučiai, tai šių eilučių sandauga $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguoja, o jos suma lygi AB.

Pastaba 3.19 Abiejų eilučių (reliatyvaus) konvergavimo nepakanka, kad teoremos tvirtinimas būtų teisingas. Pvz.,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Jų sandaugos $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ nariai

$$\begin{aligned}
|c_n| &= \left| \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{\sqrt{i+1}} (-1)^{n-i} \frac{1}{\sqrt{n-i+1}} \right| \\
&= \left| \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(i+1)(n-i+1)}} \right| \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(i+1)(n-i+1)}} \\
&\underbrace{\geqslant}_{\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\frac{i+1+n-i+1}{2}} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{2}{n+2} = 2\frac{n+1}{n+2} \to 2
\end{aligned}$$

Neišpildyta būtina konvergavimo sąlyga, tad $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverguoja.

Apibrėžimas 3.20 Tarkime, kad duota eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ir bijekcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Pažymėkime $\tilde{a}_n := a_{f(n)}$. Tada $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$ vadinama pradinės eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ perstata.

Teorema 3.21 Jei eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja absoliučiai, tai absoliučiai konverguoja ir bet kuri jos perstata, kuri be to turi tą pačią sumą.

Pastabos 3.22

1. Galima įrodyti ir priešingą teoremą (Rymano teoremą): jei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja reliatyviai, tai $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists f \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = a$.
2. Absoliučiai konverguojančios eilutės turi ir kitų baigtinėms sumoms būdingų savybių, pvz., jei $a_{nm} \geqslant 0$, $n, m \in \mathbb{N}$, tai $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}$. Ši lygybė išlieka teisinga ir su $a_{nm} \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$, jei $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| < +\infty$.

4 Funkcijos riba ir tolydumas

Apibrėžimas 4.1 Duota funkcija $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Sakoma, kad funkcija f turi ribą $A \in \overline{\mathbb{R}}$ taške a, ir rašoma $\lim_{x\to a} f(x) = A$, jei kiekvienai sekai $E \setminus \{a\} \ni x_n \to a$ galioja $f(x_n) \to A$.

Kiti žymėjimai:

- $\lim\limits_{x\to a,\ x\in E} f(x) = A$ (kai apibrėžimo sritis nėra aiški iš konteksto).
- $f(x) \to A$, $x \to a$
- Jei $E = (a, b)$, $a < b$, rašoma $\lim_{x\to a+0} f(x) = A$ (riba iš dešinės) arba $\lim_{x\downarrow a} f(x) = A$ (iš viršaus).
- Jei $E = (b, a)$, $b < a$, rašoma $\lim_{x\to a-0} f(x) = A$ (riba iš kairės) arba $\lim_{x\uparrow a} f(x) = A$ (iš apačios).

Pastaba Kad apibėžimas turėtų prasmę, turi egzistuoti bent viena tokia seka x_n, sudaryta iš aibės $E \setminus \{a\}$ elementų ir artėjanti prie a. Šiuo atveju sakoma, kad taškas a yra ribinis aibės E taškas.

Teiginys 4.2 Tarkime, $a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$, $f(x) : E \to \mathbb{R}$. Tada šie teiginiai ekvivalentūs:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$;
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |f(x) - A| < \varepsilon$, kai $0 < |x - a| < \delta$ ir $x \in E$.

Pastaba Šis teiginys tvirtina, kad abu ribos apibrėžimai ("sekų kalba" ir "ε-δ-kalba") yra ekvivalentūs, kai $a, A \in \mathbb{R}$.
Pastaba Analogiški teiginiai yra teisingi, ir kai a ir/arba A lygūs $\pm\infty$, imant atitinkamai tų taškų aplinkas vietoje ε-aplinkų:

$\forall$ taško A aplinkai $U(A) \quad \exists$ taško a aplinka $V(a)$ tokia, kad $f(x) \in U(A)$, kai $x \in V(a) \setminus \{a\}$ ir $x \in E$.

(Apibrėžimas "aplinkų kalba").

Teiginiai 4.3

1. Funkcija viename taške gali turėti tik vieną ribą.
2. Sakykime, $f : E \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ ir $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, o $\lim_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$. Tada
   a) $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = A + B$
   b) $\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$
   c) Jei, be to, $B \neq 0$, tai $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$
   d) Jei $f(x) \leqslant g(x)$, kai $x \in E \setminus \{a\}$, tai $A \leqslant B$.
3. Jei $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$, kai $x \in E \setminus \{a\}$, ir $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = A$, tai $\lim_{x\to a} h(x) = A$.

4. Jei $A < B$, tai egzistuoja taško a aplinka U, tokia, kad $f(x) < g(x)$ kai $x \in U \setminus \{a\}$, $x \in E$.

Pavyzdžiai 4.4

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ neegzistuoja.

3’ $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$

Apibrėžimas 4.5 Sakoma, kad funkcija $f : E \to \mathbb{R}$ yra tolydi taške $x_0 \in E$, jei su kiekviena seka $E \ni x_n \to x_0$ turime $f(x_n) \to f(x_0)$, $n \to \infty$. Sakoma, kad funkcija $f : E \to \mathbb{R}$ yra tolydi aibėje $A \subset E$, jei ji yra tolydi visuose aibės A taškuose.

Pastabos 4.6

1. Palyginę funkcijos ribos apibrėžimą su tolydžios funkcijos apibrėžimu, matome, kad funkcija yra tolydi taške x_0, kai $lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, ir x_0 yra ribinis aibės E taškas. Jei x_0 nėra ribinis taškas, tai funkcija tame taške visada tolydi.
2. Atsižvelgdami į 4.2 teiginį, matome, kad funkcija $f : E \to \mathbb{R}$ yra tolydi taške $x_0 \in E$ tada ir tik tada, kai $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, kai $|x - x_0| < \delta$ ir $x \in E$.

Teiginiai 4.7

1. Jei $f : E \to \mathbb{R}$ ir $g : E \to \mathbb{R}$ yra tolydžios taške $x_0 \in E$, tai funkcijos $(f+g)$, (fg) ir (jei $g(x_0) \neq 0$) $\left(\frac{f}{g}\right)$ yra tolydžios taške x_0.
2. Jei funkcija $f : E \to E_1$ yra tolydi taške $x_0 \in E$, o funkcija $g : E_1 \to \mathbb{R}$ yra tolydi taške $y_0 := f(x_0)$, tai funkcija $(g \circ f)(x) := g(f(x))$, $x \in E$ yra tolydi taške x_0.

Pavyzdžiai 4.8

1. $f(x) = c$, $x, c \in \mathbb{R}$ yra tolydi aibėje $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ yra tolydi aibėje $\mathbb{R}$.
3. $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ yra tolydi aibėje $\mathbb{R}$.

3’ $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ yra tolydi aibėje $\mathbb{R}$.

3” Kiekviena racionali funkcija $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (dviejų polinomų santykis) yra tolydi visuose taškuose $x_0 \in \mathbb{R}$, kuriuose $Q(x_0) \neq 0$.

4. $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ yra tolydi aibėje $\mathbb{R}$.
5. $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ yra tolydi aibėje $\mathbb{R}$.
6. $f(x) = \tan x$, $x \in \mathbb{R}$ yra tolydi visuose taškuose, kuriuose $\cos x \neq 0$.
7. $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $a \geqslant 0$, $a \neq 1$ yra tolydi aibėje $\mathbb{R}$.
8. $f(x) = \log_a x$, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ yra tolydi aibėje $\mathbb{R}$.
9. $f(x) = x^a$, $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$ yra tolydi aibėje $\mathbb{R}$.
10. Išvados:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$

Atskiru atveju, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

Apibrėžimas 4.9 Aibę visų tolydžių funkcijų $f : E \to \mathbb{R}$ žymėsime $C(E)$. Galima trumpinti: $C[a,b] = C([a,b])$.

Teiginys 4.10 (Bolcmano-Vejerštraso teorema apie tarpines reikšmes) Sakykime, funkcija $f \in C[a,b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$ ir $A \leqslant C \leqslant B$ arba $B \leqslant C \leqslant A$. Tada $\exists c \in [a,b] \quad f(c) = C$ (“tolydi funkcija įgyja visas tarpines reikšmes”).

Teiginys 4.11 (Vejerštraso teorema apie maksimalią reikšmę) Sakykime, $f \in C[a,b]$. Tada

1. f yra aprėžta intervale $[a,b]$: $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [a,b] \quad |f(x)| \leqslant M$.
2. $\exists x_d \in [a,b] \quad f(x_d) = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$

   $\exists x_m \in [a,b] \quad f(x_m) = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$

   (Tolydi uždarame intervale funkcija įgyja tame intervale didžiausią ir mažiausią reikšmę).

Pastaba Intervalo uždarumas – esminė sąlyga. Pvz., $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0,1]$, $f \in C(0,1]$, bet maksimumas neegzistuoja, nes $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ (tiksliau, $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = +\infty$).

Kitas pavyzdys: $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x \in (0,1)$. $f(x) \in C(0,1)$, $\sup f(x) = 1$, $\inf f(x) = \frac{1}{2}$, bet neegzistuoja toks $x_d \in (0,1) \quad f(x_d) = 1$.

Teiginys 4.12 (apie atvirkštinės funkcijos tolydumą) Tarkime, $f : X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$ (X – intervalas) yra tolydi bijekcija. Tada

1. Y taip pat intervalas, be to f yra monotoniška.
2. $f^{-1} : Y \to X$ taip pat yra tolydi.

Išvada 4.13

1. Funkcijos $\log_n x$ ($x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$), $\arcsin x$ ($x \in [-1,1]$), $\arccos x$ ($x \in [-1,1]$), $\arctan x$ ($x \in \mathbb{R}$) yra tolydžios funkcijos.
2. Visos elementarios funkcijois yra tolydžios savo egzistavimo srityse.

   elementarios funkcijos – daugianariai, racionaliosios funkcijos, trigonometrinės ir jų atvirkštinės, rodyklinė, logaritminė funkcijos, bei visos iš jų padarytos funkcijos, naudojant aritmetinius veiksmus bei kompoziciją.

   egzistavimo sritis – aibė, kurioje funkcija turi prasmę. Apibrėžimo sritis visada yra egzistavimo srities poaibis.

Pastaba $|x|$ nėra tolydi funkcija: $|x| = \sqrt{x^2} = e^{\frac{1}{2}\ln x^2}$ neegzistuoja, kai x = 0.

Apibrėžimas 4.14 Funkcija $f : E \to \mathbb{R}$ vadinama tolygiai tolydžia aibėje E, jei $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon$, kai $|x - y| < \delta$ ir $x, y \in E$.

Pastaba Palyginkime su tolydžios aibėje E funkcijos apibrėžimu: $\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon$, kai $|x - y| < \delta$ ir $y \in E$.

Pavyzdžiai 4.15

1. $f(x) = x^2$, $x \in [-a,a]$ yra tolygiai tolydi intervale $[-a,a]$.
2. $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ nėra tolygiai tolydi.
3. $f(x) = \sin x^2$, $x \in \mathbb{R}$ nėra tolygiai tolydi.

4. $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}$ nėra tolygiai tolydi.

Teorema 4.16 (Kantoro teorema) Jei $f \in C[a, b]$, tai funkcija yra tolygiai tolydi intervale $[a, b]$.

Pavyzdys 4.17 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \in (0, 1)$ yra tolygiai tolydi intervale $(0, 1)$.

Apibrėžimas 4.18 Sakoma, kad funkcija $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ turi trūkį taške $x_0 \in E$, jei ji nėra tolydi tame taške. Taškas $x_0 \in E$ vadinamas funkcijos f pirmo tipo trūkio tašku, jei $\exists f(x_0 - 0) := \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \in \mathbb{R}$ ir $\exists f(x_0 + 0) := \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \in \mathbb{R}$. Atskiru atveju, kai $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, x_0 vadinamas pašalinamu funkcijos f trūkio tašku. Likusiais atvejais (kai bent viena riba $f(x_0 - 0)$ arba $f(x_0 + 0)$ neegzistuoja arba yra begalinė), x_0 vadinamas funkcijos f antro tipo trūkio tašku.

Pastaba Dažnai patogu vadinti trūkio taškais ir taškus $x_0 \in \mathbb{R}$, kai $\dot{U}_{eps}(x_0) := U_\varepsilon \setminus \{x_0\} \subset E$
Pastaba Trūkio taškai, panašūs į funkcijos $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ $x_0 = 0$ dar vadinami osciliuojančiais.

Pavyzdžiai 4.19

1. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $x_0 = 0$ yra pašalinamas I tipo trūkio taškas.
2. $f(x) = \arctan \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $x_0 = 0$ yra I tipo trūkio taškas.
3. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $x_0 = 0$ yra II tipo (begalinis) trūkio taškas.
4. $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $x_0 = 0$ yra II tipo (osciliuojantis) trūkio taškas.

Teiginys 4.20 Monotoninė funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ neturi II tipo trūkio taškų. Jos trūkio taškų aibė yra baigtinė arba skaičioji.

5 Diferencijavimas

Apibrėžimas 5.1 Sakoma, kad funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ (I – intervalas) yra diferencijuojama taške $x \in I$, jei $\exists \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \in \mathbb{R}$. Tokiu atveju pastaroji riba vadinama funkcijos f išvestine taške x ir žymima $f'(x)$.

Pakeitę nurodytą ribą riba iš dešinės (iš kairės), gausime dešininės (kairinės) išvestinės apibrėžimą. Jos žymimos $f'_d(x)$, $f'_+(x)$ ($f'_k(x)$, $f'_-(x)$).

Jei funkcija f yra diferencijuojama su visais $x \in I$, tai sakoma, kad funkcija f yra diferencijuojama intervale I.

Pastaba 5.2 (Geometrinė išvestinės prasmė) Sakykime, funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ yra diferencijuojama taške x. Tada $\varepsilon(t) := \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f'(x) \to 0$, kai $t \to x$. $f(t) = f(x) + f'(x)(t - x) + \underbrace{\varepsilon(t)(t - x)}_{\text{“mažas”, kai } t \to x}$. Atmetę paskutinį (“mažą”) narį gauname tiesinę funkciją $y(t) = f(x) + f'(x)(t - x)$, $t \in \mathbb{R}$, kuri, kai t “arti” x, įgyja reikšmes, “artimas” $f(x)$. Ši funkcija vadinama funkcijos $f(x)$ liestine taške x. Geometriškai jos grafikas yra funkcijos f grafiko liestinė taške $(x, f(x))$.

Liestinės kampinis koeficientas $\tan \alpha = f'(x)$.

Teiginys 5.3 Jei funkcija f diferencijuojama taške x, tai ji tolydi tame taške.

Teiginys 5.4 Jei funkcijos f, g yra diferencijuojamos taške $x \in I$, tai

1. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
2. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, jei $g(x) \neq 0$.

Teiginys 5.5 Jei $f : (a,b) \to (c,d)$ yra diferencijuojama taške $x \in (a,b)$, o $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ yra diferencijuojama taške $y = f(x)$, tai funkcija $g \circ f$ yra diferencijuojama taške x ir $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$.

Pavyzdžiai 5.6

1. $f(x) = C$, $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = 0$.
2. $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = 1$.
3. $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = 2x$.
   $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. $f'(x) = nx^{n-1}$.
4. $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = \cos x$.
   $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = -\sin x$.
   $f(x) = \tan x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
   $f(x) = \cot x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. $f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
5. $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. $f'(x) = a^x \ln a$.
   Atskiru atveju $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = e^x$.
6. $f(x) = \log_a x$, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$.
   Atskiru atveju $f(x) = \ln x$, $x > 0$. $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.
7. $f(x) = x^a$, $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$. $f'(x) = ax^{a-1}$.
   Galima įsitikinti, kad ši formulė teisinga, ir kai $x < 0$, jei x^a turi prasmę.
   $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \left(\sqrt[n]{x^m}\right)'$ – ši formulė irgi teisinga, kai $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.
8. $f(x) = \left\{ \begin{array}{l|l} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{array} \right.$, $x \in \mathbb{R}$.
   $f'(x) = \left\{ \begin{array}{l|l} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{array} \right.$.
   Įdomu, kad riba $\lim_{x \to 0} f'(x)$ neegzistuoja (t.y. f' nėra tolydi funkcija).
9. $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. $f'_d(0) = 1$, $f'_k(0) = -1$.
10. $$\Bigg(\underbrace{f(x)}_{>0}{}^{g(x)}\Bigg)' = f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x)\right).$$
    $(x^x)' = x^x(\ln x + 1)$.

Teiginys 5.7 (Atvirkštinės funkcijos išvestinė) Jei griežtai didėjanti funkcija $f \in C(a,b)$ yra diferencijuojama taške $x_0 \in (a,b)$ ir $f(x) \neq 0$, tai jos atvirkštinė funkcija f^{-1} yra diferencijuojama taške $y_0 := f(x_0)$ ir $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Pavyzdžiai 5.8

1. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$.
   $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$.

2. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

   $(\text{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Apibrėžimas 5.9 Taškas $x \in E$ vadinamas funkcijos $f : E \to \mathbb{R}$ lokaliojo maksimumo tašku, jei $\exists \varepsilon > 0 \quad f(y) \leqslant f(x)$, kai $y \in U_\varepsilon(x) \cap E$. Analogiškai apibrėžiamas lokaliojo minimumo taškas. Šie taškai vadinami funkcijos (lokaliniais) ekstremumo taškais.

Teiginys 5.10 (Ferma teorema) Jei $x_0 \in (a,b)$ yra funkcijos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ekstremumo taškas ir $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$, tai $f'(x_0) = 0$.

Teiginys 5.11 (Rolio teorema) Jei $f \in C[a,b]$ yra diferencijuojama intervale (a,b), ir $f(a) = f(b)$, tai $\exists c \in (a,b) \quad f'(c) = 0$.

Teiginys 5.12 (Koši vidutinės reikšmės teorema) Jei funkcijos $f, g \in C[a,b]$ yra diferencijuojamos intervale (a,b), tai $\exists c \in (a,b) \quad (f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c)$.

Pastaba Jei $g'(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$, tai lygybę galima užrašyti taip:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Išvada 5.13 (Lagranžo vidutinės reikšmės teorema) Jei $f \in C[a,b]$ yra diferencijuojama intervale (a,b), tai $\exists c \in (a,b) \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Teiginys 5.14 Sakykme, funkcija f yra diferencijuojama intervale (a,b). Tada

1. Jei $f'(x) \geqslant 0$, $x \in (a,b)$, tai f didėja intervale (a,b) (t.y. $\forall a \leqslant x < y \leqslant b \quad f(x) \leqslant f(y)$).
2. Jei $f'(x) \leqslant 0$, $x \in (a,b)$, tai f mažėja intervale (a,b) (t.y. $\forall a \leqslant x < y \leqslant b \quad f(x) \geqslant f(y)$).
3. Jei $f'(x) = 0$, $x \in (a,b)$, tai f – konstanta (t.y. $\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in (a,b) \quad f(x) = c$).

Pastaba Pakeitę nelygybes griežtomis gausime griežtai monotoniškas funkcijas, bet ne atvirkščiai. Pvz., $f(x) = x^3$ griežtai didėja aibėje $\mathbb{R}$, bet $f'(0) = 0$.

Teiginys 5.15 Jei $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ – baigtinis arba begalinis intervalas) turi aprėžtą išvestinę intervale I, tai f yra tolygiai tolydi tame intervale.

Pastaba Šis požymis nėra būtinas. Pvz., $\sqrt{x} \in (0,1)$ yra tolygiai tolydi, nors neturi išvestinės taške $x = 0$.

Teorema 5.16 (Lopitalio taisyklė) Tarkime, kad funkcijos f ir g yra diferencijuojamos intervale (a,b) ($-\infty \leqslant a < b < +\infty$) ir

1. $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} g(x) = 0$ arba $\lim_{x \downarrow a} g(x) = +\infty$.
2. $g'(x) \neq 0$, kai $x \in (a,b)$.
3. $\exists \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Tada $\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Pavyzdžiai 5.17

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cosx}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{10}}{e^{\frac{x}{10}}}=0.$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{lnx}{x^a}=0$, $a>0$.

   Panašiai galima įrodyti, kad $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ln^n x}{x^a}=0$, $a>0$, $n\in\mathbb{N}$.

Apibrėžimas 5.18 Jei funkcija f yra diferencijuojama intervale I, ir jos išvestinė $f'(x)$, $x\in I$, taip pat yra diferencijuojama funkcija, tai jos išvestinė $(f')'(x)$ vadinama funkcijos f antrąja išvestine ir žymima $f''(x)$ arba $f^{(2)}(x)$. Analogiškai apibrėžiamos aukštesnių eilių išvestinės $f'''(x)=f^{(3)}(x), \ldots f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)})'(x)$, su sąlyga, kad jos egzistuoja.

Visų funkcijų $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, turinčių visų eilių tolydžias išvestines iki n-tosios eilės imtinai aibė žymima $C^n[a,b]:=\{f(x):\quad \forall k=1,\ldots,n\quad f^{(k)}\in C[a,b]\}$. Be to, $f\in C^\infty[a,b]\quad\Longleftrightarrow\quad\forall n\in\mathbb{N}\quad\exists f^{(n)}\in C[a,b]$.

Teorema 5.19 (Teiloro formulė) Tarkime, funkcija $f\in C^n[x_0,x]$ yra $(n+1)$ kartą diferencijuojama intervale (x_0,x) (tam pakanka $f\in C^{n+1}[x_0,x]$). Tada $\exists c\in(x_0,x)$:

$$f(x)=\underbrace{f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{=:P_n(x_0;x)}+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{=:R_n(x_0;x)}$$

Daugianaris $P_n(x_0;x)$ vadinamas Teiloro daugianariu, o reiškinys $R_n(x_0;x)$ – Teiloro formulės liekamuoju nariu Lagranžo pavidalu.

Pastabos 5.20

1. Formulė teisinga ir intervalui $[x,x_0]$, kai $x<x_0$.
2. Teiloro formulė leidžia "sudėtingos" funkcijos reikšmių skaičiavimą pakeisti "paprastos" funkcijos – daugianario $P_n(x_0;x)$ reikšmių skaičiavimu, kai $R_n(x_0;x)$ yra "mažas" (pastaroji situacija yra tipiška).
3. Ypač dažnai ši formulė naudojama, kai $x_0=0$:

   $$f(x)=f(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

   (Makloreno formulė)
4. Liekamojo nario Koši pavidalas:

   $$R_n(x_0;x)=\frac{f^{(n+1)}(\tilde{c})}{n!}(x-\tilde{c})(x-x_0)^n$$

5. Kai $n=2$:

   $$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f'''(c)}{3!}(x-x_0)^3$$

   Pirmi du nariai – liestinės lygtis ("geriausiai priglundanti tiesė"), pirmi trys nariai – "geriausiai priglundanti parabolė" ir t.t.

Apibrėžimas 5.21 Rašysime $f(x)=o\,(g(x))$, $x\to a$, jei egzistuoja tokia funkcija $\varepsilon(x)$, apibrėžta taško a aplinkoje, kad $\varepsilon(x)\to0$, kai $x\to a$, ir $f(x)=\varepsilon(x)g(x)$ (taško a aplinkoje). Jei $g(x)\neq0$ taško a aplinkoje, tai $f(x)=o\,(g(x))$, $x\to a\Longleftrightarrow\frac{f(x)}{g(x)}\to0$, $x\to a$.

Pastaba Jei $g(x)\to0$ ir $f(x)=o\,(g(x))$, $x\to a$, tai sakoma, kad "f nyksta greičiau nei g", $x\to a$.

Jei $g(x)\to+\infty$, tai sakoma, kad "f auga greičiau nei g".

Pavyzdžiai $x^2=o(x)$, $x\to0$

$x=o(x^2)$, $x\to+\infty$

$x^a=o(e^x)$, $x\to+\infty$

$\lg x=o(x^a)$, $x\to+\infty$

Išvada 5.22 (Teiloro formulė su Peano pavidalo liekamuoju nariu) Jei $f \in C^n[x_0, x]$, tai $f(t) = P_n(x_0; t) + o(|x - x_0|^n)$, $x \to x_0$, t.y. $\frac{R_n(x_0;x)}{|x-x_0|^n} \to 0$, $x \to x_0$.

Apibrėžimas 5.23 Tarkime, kad funkcija f yra be galo diferencijuojama taško x_0 aplinkoje. Funkcijos f Teiloro eilute su centru x_0 vadinama funkcijų eilutė

$$f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Pastebėkime, kad Teiloro eilutės dalinės sumos yra jos Teiloro daugianariai $P_n(x_0; x)$, todėl ši eilutė konverguoja su tais x, su kuriais Teiloro formulės liekamasis narys $R_n(x_0; x) \to 0$, $n \to \infty$ ir tokiu atveju

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Pavyzdžiai 5.24

1. $e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$.

2. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$.

   $\cos x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$.

3. $\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, $x \in (-\frac{1}{2}, 1]$ (iš tiesų formulė teisinga, kai $x \in (-1; 1]$, tik tai sunku įrodyti turimomis priemonėmis).

4. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

   Funkcijos Teiloro eilutė tapačiai lygi nuliui.

5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}}{x^7} = -\frac{1}{7!}$.

Apibrėžimas 5.25 Funkcija $f : E \to \mathbb{R}$ vadinama iškila (žemyn) intervale $I \subset E \subset \mathbb{R}$, jei $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$, su visais $x_1, x_2 \in I$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Reikalaudami griežtos nelygybės gauname griežtai iškilos (žemyn) funkcijos apibrėžimą.

Pakeitę nelygybę priešinga, gauname iškilos aukštyn arba išgaubtos funkcijos apibrėžimą.

Teiginys 5.26 Diferencijuojama funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ yra iškila (žemyn) intervale I tada ir tik tada, kai jos išvestinė f' didėja intervale I. Griežtą išvestinės didėjimą atitinka griežtas funkcijos iškilumas.

Išvada 5.27 Dukart diferencijuojama funkcija f yra iškila intervale I tada ir tik tada, kai $f'' \geqslant 0$ intervale I. Jei $f'' > 0$ intervale I, tai f – griežtai iškila (nebūtinai atvirkščiai).

Pastaba Analogiškas tvirtinimas teisingas ir išgaubtai funkcijai.

Apibrėžimas 5.28 Taškas $x_0 \in (a, b)$ vadinamas funkcijos $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ perlinkio tašku, jei $\exists \varepsilon > 0$ toks, kad f yra iškila intervale $U_\varepsilon^-(x_0) := (x_0 - \varepsilon, x_0)$ ir išgaubta intervale $U_\varepsilon^+(x_0) := (x_0, x_0 + \varepsilon)$ arba atvirkščiai.

Išvada 5.29 (Iš 5.26) Jei x_0 yra dukart diferencijuojamas funkcijos perlinkio taškas, tai $f''(x_0) = 0$ (nebūtinai atvirkščiai).

6 Funkcijų sekų ir eilučių tolydusis konvergavimas

Apibrėžimas 6.1 Sakoma, kad funkcijų seka (f_n), $n \in \mathbb{N}$ konverguoja į funkciją f aibėje E, jei $\forall x \in E \quad f_n(x) \to f(x)$, kai $n \to \infty$. Toks funkcijų sekos konvergavimas vadinamas paprastu arba pataškiu ir žymimas $f_n \to f$, $n \to \infty$ (aibėje E).

Sakoma, kad funkcijų seka (f_n) konverguoja į funkciją f tolygiai aibėje E, jei $\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0$, $n \to \infty$. Žymima $f_n \rightrightarrows f$, $n \to \infty$ (aibėje E).

Pastaba 6.2 $f_n \to f \quad \iff \quad \forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, kai $n > N$

$f_n \rightrightarrows f \quad \iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, kai $n > N$

Skirtumas – tolygaus konvergavimo atveju N priklauso tik nuo ε ir nepriklauso nuo x.

Pavyzdžiai 6.3

1. $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$. $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$.

   Funkcijų seka konverguoja pataškiui.

2. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $x \in [0, 1]$. $f(x) = 0$.

   Funkcijų seka konverguoja tolygiai.

3. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $x \in [0, 1]$. $f(x) = 0$.

   Funkcijų seka konverguoja pataškiui.

Pastaba 6.4 Funkcijoms $f,\ g : E \to \mathbb{R}$ pažymėkime $d(f, g) = d_E(f, g) := \sup_{x\in E} |f(x) - g(x)|$. Funkcija d pasižymi šiomis savybėmis:

1. $d(f, g) = d(g, f)$.
2. $d(f, g) \geqslant 0$, be to $d(f, g) = 0 \quad \iff \quad f = g$.
3. $d(f, g) \leqslant d(f, h) + d(h, g)$, $h : E \to \mathbb{R}$ (Trikampio nelygybė).

Pastebime, kad $f_n \rightrightarrows f$ aibėje $E \iff d(f_n, f) \to 0$, $n \to \infty$.

Funkcija d vadinama tolygaus konvergavimo metrika (atstumu). Kartais – supremumo metrika.

Teiginys 6.5 (Funkcijų sekos tolygaus konvergavimo Koši kriterijus) Funkcijų seka (f_n) konverguoja tolygiai (į kokią nors funkciją f) aibėje E tada ir tik tada, kai

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad d(f_n, f_m) = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \text{ kai } m, n > N$$

Apibrėžimas 6.6 Sakoma, kad funkcijų eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguoja tolygiai aibėje E, jei jos dalinių sumų seka $S_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$, $n \in \mathbb{N}$ konverguoja tolygiai aibėje E į kokią nors funkciją f. Tokiu atveju rašoma $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ tolygiai aibėje E (arba $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ tolygiai pagal $x \in E$).

Teiginys 6.7 (Funkcijų eilučių tolygaus konvergavimo Vejerštraso požymis) Jei $|f_n(x)| \leqslant c_n$, $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$ ir $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty$, tai funkcijų eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguoja tolygiai aibėje E.

Teorema 6.8 (Teorema apie ribų sukeitimą) Tarkime, kad $f_n \rightrightarrows f$ aibėje E ir $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists A_n := \lim_{t\to x} f_n(t) \in \mathbb{R}$, $t \in E$. Tada $\exists \lim_{t\to x} f(t) = \lim_{n\to\infty} A_n \in \mathbb{R}$. Kitaip tariant,

$$\lim_{t\to x} \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x} f_n(t)$$

Pastaba Be tolygaus konvergavimo toks ribų sukeitimas ne visada teisingas. Pvz., $f_n(x) = x^n$, $x \in E = (0, 1)$:

$\lim_{t\to x} \lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$

$\lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x} f_n(t) = 1$

Išvada 6.9 Jei $f_n \in C(E)$, $n \in \mathbb{N}$ ir $f_n \rightrightarrows f$ aibėje E, tai f taip pat tolydi.

Pastaba Funkcijų sekos tolydus konvergavimas yra esminis:

$$f_n(x) = x^n,\, x \in E = [0,1],\, f_n(x) \to f(x) = \left\{ \begin{array}{c|l} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{array} \right. .$$

Teorema 6.10 (Dinio lema) Tarkime, kad funkcijų seka $(f_n \in C[a,b])$ kiekvienam taške monotoniškai artėja prie funkcijos $f \in C[a,b]$. Tada f_n konverguoja tolygiai.

Pastaba Monotoniškumas yra esminis. Pvz., $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $x \in [0,1]$, $f_n \to 0$ (pataškiui).

Teorema 6.11 (Vejerštraso teorema apie tolydžių funkcijų aproksimaciją daugianariais) Bet kokiai funkcijai $f \in C[a,b]$ galima rasti daugianarių seką (P_n), konverguojančią į f tolygiai intervale $[a,b]$.

Lema 6.12 Egzistuoja daugianarių seka $(p_{nk} : n \in \mathbb{N}, k : 0, 1, \ldots, n)$, pasižyminti šiomis savybėmis:

1. $\forall p_{nk}(x) \geqslant 0$, $x \in [0,1]$.
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) = 1$
3. $c_n := \displaystyle\max_{x\in[0,1]} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 p_{nk}(x) \to 0,\, n \to \infty.$

Apibrėžimas 6.13 Funkcijų eilutė $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ vadinama laipsnine eilute su centru taške a; čia c_n vadinami laipsninės eilutės koeficientais.

Teiginys 6.14 Sakykime, c_n, $n = 0, 1, \ldots$ – laipsninės eilutės koeficientai. Pažymėkime

$$R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \in [0, +\infty].$$

Tada

1. Laipsninė eilutė konverguoja absoliučiai, kai $x \in (a-R, a+R)$ (t.y. $|x-a| < R$) ir diverguoja, kai $x \notin [a-R, a+R]$ (t.y. $|x-a| > R$).
2. Jei $\exists \widetilde{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, tai $\widetilde{R} = R$

R vadinamas laipsninės eilutės konvergavimo spinduliu, o intervalas $(a-R, a+R)$ – konvergavimo intervalu.

Teiginys 6.15 Tarkime, turime laipsninę eilutę $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ su konvergavimo spinduliu R. Tada $\forall \widetilde{R} < R$ ši laipsninė eilutė konverguoja tolygiai intervale $[a-\widetilde{R}, a+\widetilde{R}]$.

Išvada 6.16 Laipsninės eilutės suma – tolydi funkcija laipsninės eilutės konvergavimo intervale $(a-R, a+R)$.

