

# Matematinės analizės konspektai (be įrodymų)

Marius Gedminas  
pagal V. Mackevičiaus paskaitas

1998 m. rudens semestras (I kursas)

## 1 Realieji skaičiai

Apibrėžimas 1.1 Uždarųjų intervalų seka  $[a_n, b_n]$ ,  $n = 1, 2, \dots$  vadinama įdėtųjų uždarųjų intervalų seka, jei  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Teiginys 1.2 (Įdėtųjų intervalų principas (aksioma)) Bet kokios įdėtųjų uždarųjų intervalų sekos sankirta – netuščia aibė ( $\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}, c \in [a_n, b_n]$ ).

Pastaba Vien racionaliesiems skaičiams šis principas neteisingas. Pvz.,

$$[1.4, 1.5] \supset [1.41, 1.42] \supset \dots$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\sqrt{2}\} \notin \mathbb{Q}$$

Pastaba Intervalų uždarumas yra svarbus dalykas. Pvz.,

$$(0, \frac{1}{n+1}) \in (0, \frac{1}{n}), \text{ bet } \bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{n}) = \emptyset$$

Apibrėžimas 1.3 Aibė  $A \subset \mathbb{R}$  vadinama aprėžta iš viršaus, jei  $\exists c \in \mathbb{R}$  toks, kad  $\forall x \in A, x \leq c$ .  $c$  vadinamas aibės viršutiniu rėžiu. Aibės  $A \subset \mathbb{R}$  mažiausias viršutinis rėžis, jei jis egzistuoja, vadinamas aibės  $A$  tiksliuoju viršutiniu rėžiu ir žymimas  $\sup A$  (“supremum  $A$ ”).

Aibė  $A \subset \mathbb{R}$  vadinama aprėžta iš apačios, jei  $\exists c \in \mathbb{R}$  toks, kad  $\forall x \in A, x \geq c$ .  $c$  vadinamas aibės apatiniu rėžiu. Aibės  $A \subset \mathbb{R}$  mažiausias apatinis rėžis, jei jis egzistuoja, vadinamas aibės  $A$  tiksliuoju apatiniu rėžiu ir žymimas  $\inf A$  (“infimum  $A$ ”).

Teorema 1.4 (Tikslųjų rėžių egzistavimas) Kiekviena netuščia aprėžta iš viršaus (apačios) aibė  $A \subset \mathbb{R}$  turi tikslų viršutinį (apatinį) rėžį.

Pastaba 1.5 Susitarsime rašyti  $\sup A = +\infty$  ( $\inf A = -\infty$ ), jei  $A$  nėra aprėžta iš viršaus (apačios).

Teorema 1.6 (Borelio-Lebego teorema apie baigtinį denginį) Jei atvirųjų intervalų sistema  $\{\mathcal{G}_\alpha : \alpha \in I\}$  dengia intervalą  $[a, b]$  (t.y.  $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{G}_\alpha \supset [a, b]$ ), tai egzistuoja posistemis  $\{\mathcal{G}_{\alpha_1}, \dots, \mathcal{G}_{\alpha_r}\}$ , taip pat dengiantis šį intervalą.

Pastaba Tiek atvirųjų intervalų sistema, tiek uždaras intervalas yra būtini dalykai teoremoje ir jų negalima atsisakyti. Pvz.,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1 - \frac{1}{n}] \cup [1, 2] \supset [0, 2],$$

bet iš gautos sistemos negalime išrinkti baigtinio posistemio, kuris dengtų intervalą  $[0, 2]$ .

## 2 Sekos riba

Apibrėžimas 2.1 Sakoma, kad seka  $(x_n)$  turi ribą  $x \in \mathbb{R}$ , jei su visais (“kiek norima mažais”)  $\varepsilon > 0$  atsiras  $N \in \mathbb{N}$ , kad  $|x_n - x| < \varepsilon$ , kai  $n > N$  (“ $x_n$  yra kiek norima arti  $x$  su pakankamai dideliais  $n$ ”). Tokiu atveju žymima

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= x \\ \lim_n x_n &= x \\ \lim x_n &= x \\ x_n \rightarrow x, n &\rightarrow \infty\end{aligned}$$

Pastaba Vietoje  $N \in \mathbb{N}$  galime imti  $N \in \mathbb{R}$ .

Pavyzdžiai 2.2

1.  $x_n = \frac{1}{n}$ ,  $\lim x_n = 0$
- 1'  $x_n = \frac{1}{n^3 + 5n^2 + 7n + 2}$ ,  $\lim x_n = 0$
2.  $x_n = \frac{19 \sin n - 98 \cos^3 n}{\sqrt{n}}$ ,  $\lim x_n = 0$
3.  $x_n = \sqrt{n}$ . Seka diverguoja (neturi baigtinės ribos)
4.  $x_n = (-1)^n$ . Seka diverguoja (neturi ribos)
5.  $\{[a_n, b_n]\}$  – įdėtųjų uždarytųjų intervalų seka,  $b_n - a_n \rightarrow 0$ , kai  $n \rightarrow \infty$ . Remiantis įdėtųjų intervalų principu,  $\exists c \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ . Tada  $\lim a_n = \lim b_n = c$

Apibrėžimas 2.3 Skaičių seka  $(x_n)$  vadinama aprėžta (aprėžta iš viršaus, aprėžta iš apačios), jei  $\exists M \in \mathbb{R} : |x_n| \leq M, n \in \mathbb{N}$  (atitinkamai  $x_n \leq M, n \in \mathbb{N}, x_n \geq M, n \in \mathbb{N}$ ).

Teiginiai 2.4

1. Kiekviena konverguojanti seka yra aprėžta.
2. Seka gali turėti ne daugiau kaip vieną ribą.

Teorema 2.5 (Veiksmai su ribomis) Tarkime, kad  $\lim x_n = x$  ir  $\lim y_n = y$ . Tada

1.  $\lim(x_n + y_n) = x + y$
2.  $\lim(x_n \cdot y_n) = x \cdot y$
3. Jei  $y \neq 0$ , tai  $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$

Teiginys 2.6 (Perėjimas prie ribos nelygybėse)

1. Jei  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$  ir  $x < y$ , tai  $\exists N \in \mathbb{N} : x_n < y_n$ , kai  $n > N$ .  
Atskiru atveju, jei  $y_n \rightarrow y$  ir  $y > 0$ , tai  $\exists N \in \mathbb{N} : y_n > 0$ , kai  $n > N$ .
2. Jei  $x_n \leq y_n, n \in \mathbb{N}$  ir  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ , tai  $x \leq y$
3. (Dviejų policininkų principas) Jei  $x_n \leq z_n \leq y_n$  ir  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow x$ , tai  $z_n \rightarrow x$ .

Pavyzdžiai 2.7

1. Iš  $x_n < y_n, x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$  neišplaukia  $x < y$ ! Pvz.,  $\forall n : 0 < \frac{1}{n}$ . Tada  $x = \lim x_n = y = \lim y_n = 0$ .

2.

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}, n \in \mathbb{N}$$

$$1 \leftarrow \frac{n}{n+1} = \frac{n}{\sqrt{n^2+2n+1}} \leq z_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2}} = 1 \rightarrow 1$$

Taigi,  $z_n \rightarrow 1$ .

Apibrėžimas 2.8 Sakykime, turim seką  $(x_n)$ . Imkime didėjančią natūraliųjų skaičių seką  $(n_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Tada seka  $(x_{n_k})$  vadinama sekos  $(x_n)$  posekiu (arba daline seka). Jei sekos  $(x_n)$  posekis turi ribą  $x$ , tai  $x$  vadinama sekos  $(x_n)$  daline riba.

Pastaba Jei seka  $(x_n)$  turi ribą  $x$ , tai visi jos posekiai turi tą pačią ribą.

Teiginys 2.9 (Vejerštraso teorema apie konverguojantį posekį) Kiekviena aprėžta seka turi konverguojantį posekį.

Teorema 2.10 (Sekos konvergavimo Koši kriterijus) Tarkime, turime seką  $(x_n)$ . Tada šie du teiginiai ekvivalentūs:

1. Seka  $(x_n)$  konverguoja
2.  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : |x_n - x_m| < \varepsilon$ , kai  $n, m > N$

Pastabos

1. Sekos  $(x_n)$ , pasižyminčios antra savybe, vadinamos fundamentaliosiomis arba Koši sekomis. Erdvės, kuriose kiekviena Koši seka konverguoja, vadinamos pilnomis. Taigi, ši teorema teigia, kad  $\mathbb{R}$  yra pilna erdvė.
2. Antrasis teiginys dažnai užrašomas taip:

$$|x_n - x_m| \rightarrow 0, \text{ kai } n, m \rightarrow \infty$$

Pavyzdžiai 2.11

1.  $x_n = \frac{\cos 1}{2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{2^3} + \cdots + \frac{\cos n}{2^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  Seka turi ribą remiantis Koši kriterijumi.
2.  $x_n = (-1)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Seka diverguoja.
3.  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ . Seka diverguoja.

Apibrėžimas 2.12 Seką  $(x_n)$  vadinsime

1. didėjančia, jei  $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} \geq x_n$ .
2. griežtai didėjančia, jei  $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} > x_n$ .
3. mažėjančia, jei  $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} \leq x_n$ .
4. griežtai mažėjančia, jei  $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} < x_n$ .

Teiginys 2.13 Didėjanti (mažėjanti) seka  $(x_n)$  konverguoja tada, ir tik tada, kai ji yra aprėžta iš viršaus (apačios). Tokiu atveju  $\lim x_n = \sup\{x_n\}$  ( $\inf\{x_n\}$ ).

Pavyzdžiai 2.14

1.  $x_n = \frac{n}{q^n}$ ,  $|q| > 1$ .  $\lim x_n = 0$ .
2.  $\lim \sqrt[n]{n} = 1$
- 2'  $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ ,  $a > 0$
3.  $\lim \frac{q^n}{n!} = 0$ ,  $q \in \mathbb{R}$

$$4. \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Apibrėžimas 2.15 Išplėstine realiųjų skaičių tiese vadiname aibę  $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$  su tokiais papildomais sąryšiais:

1.  $-\infty < x < +\infty, \quad x \in \mathbb{R}$
2.  $x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty, \quad x \in \mathbb{R}$
3.  $x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \begin{cases} \pm\infty & x > 0 \\ \mp\infty & x < 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Apibrėžimas 2.16 Turime seką  $(x_n)$ . Sakysime, kad

1.  $\lim x_n = +\infty$ , jei  $\forall \Delta \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N}$ , toks, kad  $x_n > \Delta$ , kai  $n > N$ .
2.  $\lim x_n = -\infty$ , jei  $\forall \Delta \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N}$ , toks, kad  $x_n < \Delta$ , kai  $n > N$ .
3.  $\lim x_n = \infty$ , jei  $\lim |x_n| = +\infty$ .

Pastabos 2.17

1. Baigtinių ir begalinių ribų apibrėžimus galima unifikuoti naudojant taško aplinkos sąvoką.  
Taško  $x \in \mathbb{R}$   $\varepsilon$ -aplinka vadinamas intervalas  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ . Ji žymima  $U_\varepsilon(x)$ .  $y \in U_\varepsilon(x) \iff |y - x| < \varepsilon$ .  
Taško  $+\infty$   $\Delta$ -aplinka vadinamas intervalas  $(\Delta, +\infty]$ . Žymima  $U_\Delta(+\infty)$ .  
Taško  $-\infty$   $\Delta$ -aplinka vadinamas intervalas  $[-\infty, \Delta)$ . Žymima  $U_\Delta(-\infty)$ .  
Tada  $\lim x_n = x \iff \forall U(x) \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad x_n \in U(x)$ , kai  $n > N$ .
2. Monotoniška seka išplėstinėje realiųjų skaičių tiesėje visada turi ribą (baigtinę arba begalinę).
3. Dalinės ribos sąvoka turi pramę ir begalinių ribų atveju. Todėl tiesėje  $\overline{\mathbb{R}}$  bet kokia seka turi bent vieną dalinę ribą.

Teiginys 2.18 Turime sekas  $(x_n)$  ir  $(y_n)$ ,  $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ . Tada

1. Jei  $x_n \rightarrow +\infty$  ir  $y_n \geq c \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tai  $x_n + y_n \rightarrow +\infty$ .  
Atskiru atveju, jei  $x_n \rightarrow +\infty$  ir  $y_n \rightarrow y \in \mathbb{R}$  (arba  $y = +\infty$ ), tai  $x_n + y_n \rightarrow +\infty$ .
- 1' Jei  $x_n \rightarrow -\infty$  ir  $y_n \leq c \in \mathbb{R}$ , tai  $x_n + y_n \rightarrow -\infty$ .
2. a) Jei  $x_n > 0$ , tai  $\lim x_n = +\infty$  tada, ir tik tada, kai  $\lim \frac{1}{x_n} = 0$ .  
b) Jei  $x_n < 0$ , tai  $\lim x_n = -\infty$  tada, ir tik tada, kai  $\lim \frac{1}{x_n} = 0$ .
3. Jei  $x_n \rightarrow +\infty$  ir  $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq y_n$ , tai  $y_n \rightarrow +\infty$ .

Apibrėžimas 2.19 Sekos  $(x_n)$ ,  $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$ , apatinė ir viršutinė ribomis vadinami skaičiai

$$i = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

ir

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

Žymima:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = i$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = s$$

Apatinė ir viršutinė ribos visada egzistuoja, nes sekos  $i_n = \inf \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$  ir  $s_n = \sup \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$  yra monotoniškos.

Pavyzdžiai 2.20

1.  $x_n = (-1)^n$ .  $\liminf x_n = -1$ ,  $\limsup x_n = 1$ .
2.  $x_n = (-1)^n \cdot n$ .  $\liminf x_n = -\infty$ ,  $\limsup x_n = +\infty$ .
3.  $x_n = n^{(-1)^n}$ .  $\liminf x_n = 0$ ,  $\limsup x_n = +\infty$ .
4.  $x_n = n$ .  $\liminf x_n = +\infty$ ,  $\limsup x_n = +\infty$ .

Teiginys 2.21 Apatinė ir viršutinė sekos ribos yra lygios mažiausiai ir didžiausiai tos sekos dalinėms riboms

Išvada 2.22 Seka  $(x_n)$  turi ribą tada, ir tik tada, kai  $\liminf x_n = \limsup x_n$ . Tokiu atveju  $\lim x_n = \liminf x_n = \limsup x_n$ .

### 3 Skaičių eilutės

Apibrėžimas 3.1 Skaičių eilute vadinamas reiškiny

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots, \quad \forall n \quad a_n \in \mathbb{R}$$

Sekos  $(a_n)$  nariai vadinami eilutės  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  nariais.

Skaičiai  $S_N := \sum_{n=1}^N a_n$ ,  $N \in \mathbb{N}$  vadinami eilutės dalinėmis sumomis.

Jei  $\exists S := \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ , tai  $S$  vadinamas eilutės suma ir rašoma

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Jei  $S \in \mathbb{R}$  (t.y. suma baigtinė), tai sakoma, kad eilutės suma konverguoja, priešingu atveju (kai suma begalinė arba neegzistuoja) – diverguoja

Teiginiai 3.2

1. (Eilučių konvergavimo Koši kriterijus)

Eilutė  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguoja tada, ir tik tada, kai

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{n=N+1}^M a_n \right| < \varepsilon \quad \text{kai } M > N > N_0$$

2. (Būtinoji eilutės konvergavimo sąlyga)

Jei eilutė  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguoja, tai  $a_n \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

3. Jei  $a_n \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tai  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguoja tada, ir tik tada, kai jos dalinių sumų seka  $(S_N)$  yra aprėžta.

Pastaba 3.3 Jei  $a_n \geq 0$ , tai eilutė  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  visada turi sumą – baigtinę arba begalinę  $(+\infty)$ , todėl eilutei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  su  $a_n \geq 0$  prasminga rašyti  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ , kai ji konverguoja, ir  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ , kai ji diverguoja.

Pavyzdžiai 3.4

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{kai } |x| < 1 \\ +\infty & \text{kai } x \geq 1 \\ \text{neapibrėžta} & \text{kai } x \leq -1 \end{cases}$
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$  diverguoja.

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \text{ (diverguoja).}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2 \text{ (konverguoja).}$$

Teiginiai 3.5 (Eilučių palyginimas)

1. Jei  $|a_n| \leq c_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ir  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty$ , tai  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguoja.

2. Jei  $0 \leq d_n \leq a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ir  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = +\infty$ , tai  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$  (diverguoja).

3. Tarkime, kad  $a_n \geq 0$ ,  $b_n \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ir  $\exists \alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \in [0, +\infty]$ .

Jei  $\alpha < +\infty$  ir  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$ , tai  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ .

Jei  $\alpha > 0$  ir  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$ , tai  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ .

Kitaip tariant, jei  $\alpha \in (0, +\infty)$ , tai  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ir  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  arba abi konverguoja, arba abi diverguoja.

Lema 3.6 Tarkime,  $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Tokiu atveju  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$  tada, ir tik tada, kai  $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} < +\infty$ .

Pavyzdžiai 3.7

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < +\infty \iff p > 1$$

$$2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n} < +\infty \iff p > 1$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln^p \ln n} < +\infty \iff p > 1$$

Teiginys 3.8

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Teiginys 3.9 (Eilutės konvergavimo Koši požymis) Bet kokiai eilutei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  pažymėsimė  $\alpha := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ .

1. Jei  $\alpha < 1$ , tai eilutė  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguoja;

2. Jei  $\alpha > 1$ , tai eilutė  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverguoja;

3. Yra tiek konverguojančių, tiek diverguojančių eilučių, kurioms  $\alpha = 1$ .

Teiginys 3.10 (Eilutės konvergavimo Dalamberto požymis) Sakykime,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  yra eilutė su  $a_n \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Jei  $\alpha := \limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ , tai eilutė  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguoja;

2. Jei  $\exists N \in \mathbb{N} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ , kai  $n > N$ , tai eilutė  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverguoja (tam pakanka  $\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ );

3. Yra tiek konverguojančių, tiek diverguojančių eilučių, kurioms  $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ .

Pavyzdžiai 3.11

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ konverguoja (Dalamberas arba Koši).}$$

2.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots$  konverguoja (Koši; Dalamberas atsakymo neduoda).

Pastaba Koši požymis stipresnis: jei Koši požymis neduoda atsakymo, tai neduos ir Dalambero.

Teiginys 3.12 (Eilutės konvergavimo Abelio-Dirichlė požymis) Tarkime, kad a) eilutės  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  dalinių sumų seka yra aprėžta:

$$|A_n| \leq M, \quad n \in \mathbb{N}, \quad M < +\infty$$

b)  $b_n \geq b_{n-1} \geq 0, n \in \mathbb{N}$ , c)  $\lim b_n = 0$ . Tada eilutė  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  konverguoja.

Pastabos

1. Kai išpildytos sąlygos b) ir c), dažnai sakoma, kad  $b_n$  monotoniškai artėja į nulį (žymima  $b_n \downarrow 0$  arba  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ).
2. Yra prasmė naudoti šį požymį tik tada, kai  $a_n$  nariai įgyja skirtingus ženklus be galo daug kartų.

Išvada 3.13 (Leibnico teorema) Jei  $b_n \downarrow 0, n \rightarrow \infty$ , tai eilutė  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$  konverguoja.

Pavyzdžiai 3.14

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  konverguoja, kai  $x \in [-1, 1)$  (Dalambero požymis, kai  $|x| \neq 1$ , Leibnico teorema, kai  $x = -1$ , harmoninė eilutė, kai  $x = 1$ ).
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{4}}{\ln(n+1)}$  konverguoja (Abelio-Dirichlė požymis).

Apibrėžimas 3.15 Sakoma, kad eilutė  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguoja absoliučiai, jei  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ .

Jei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguoja, o  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$ , tai sakoma, kad eilutė  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguoja reliatyviai.

Teiginys 3.16 Jei eilutė konverguoja absoliučiai, tai ji konverguoja.

Apibrėžimas 3.17 Dviejų eilučių  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ir  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  sandauga vadinama eilutė  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ , kurioje  $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$ .

Teorema 3.18 (Mertenso teorema) Jei  $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}, B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \in \mathbb{R}$  ir bent viena iš šių eilučių konverguoja absoliučiai, tai šių eilučių sandauga  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  konverguoja, o jos suma lygi  $AB$ .

Pastaba 3.19 Abiejų eilučių (reliatyvaus) konvergavimo nepakanka, kad teoremos tvirtinimas būtų teisingas. Pvz.,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Jų sandaugos  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  nariai

$$\begin{aligned} |c_n| &= \left| \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{1}{\sqrt{i+1}} (-1)^{n-i} \frac{1}{\sqrt{n-i+1}} \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{(i+1)(n-i+1)}} \right| \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{\sqrt{(i+1)(n-i+1)}} \\ &\stackrel{\substack{\geq \\ \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}}}{\geq} \sum_{i=0}^n \frac{1}{\frac{i+1+n-i+1}{2}} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{2}{n+2} = 2 \frac{n+1}{n+2} \rightarrow 2 \end{aligned}$$

Neišpildyta būtina konvergavimo sąlyga, tad  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  diverguoja.

Apibrėžimas 3.20 Tarkime, kad duota eilutė  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ir bijekcija  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Pažymėkime  $\tilde{a}_n := a_{f(n)}$ . Tada  $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$  vadinama pradinės eilutės  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  perstata.

Teorema 3.21 Jei eilutė  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguoja absoliučiai, tai absoliučiai konverguoja ir bet kuri jos perstata, kuri be to turi tą pačią sumą.

Pastabos 3.22

- Galima įrodyti ir priešingą teoremą (Rymano teoremą): jei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguoja reliatyviai, tai  $\forall a \in \mathbb{R} \exists f \sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = a$ .
- Absoliučiai konverguojančios eilutės turi ir kitų baigtinėms sumoms būdingų savybių, pvz., jei  $a_{nm} \geq 0$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ , tai  $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}$ . Ši lygybė išlieka teisinga ir su  $a_{nm} \in \mathbb{R}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ , jei  $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| < +\infty$ .

## 4 Funkcijos riba ir tolydumas

Apibrėžimas 4.1 Duota funkcija  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Sakoma, kad funkcija  $f$  turi ribą  $A \in \overline{\mathbb{R}}$  taške  $a$ , ir rašoma  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , jei kiekvienai sekai  $E \setminus \{a\} \ni x_n \rightarrow a$  galioja  $f(x_n) \rightarrow A$ .

Kiti žymėjimai:

- $\lim_{x \rightarrow a, x \in E} f(x) = A$  (kai apibrėžimo sritis nėra aiški iš konteksto).
- $f(x) \rightarrow A, x \rightarrow a$
- Jei  $E = (a, b)$ ,  $a < b$ , rašoma  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$  (riba iš dešinės) arba  $\lim_{x \downarrow a} f(x) = A$  (iš viršaus).
- Jei  $E = (b, a)$ ,  $b < a$ , rašoma  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$  (riba iš kairės) arba  $\lim_{x \uparrow a} f(x) = A$  (iš apačios).

Pastaba Kad apibėžimas turėtų prasmę, turi egzistuoti bent viena tokia seka  $x_n$ , sudaryta iš aibės  $E \setminus \{a\}$  elementų ir artėjanti prie  $a$ . Šiuo atveju sakoma, kad taškas  $a$  yra ribinis aibės  $E$  taškas.

Teiginys 4.2 Tarkime,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Tada šie teiginiai ekvivalentūs:

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ;
- $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 |f(x) - A| < \varepsilon$ , kai  $0 < |x - a| < \delta$  ir  $x \in E$ .

Pastaba Šis teiginys tvirtina, kad abu ribos apibrėžimai (“seku kalba” ir “ $\varepsilon$ - $\delta$ -kalba”) yra ekvivalentūs, kai  $a, A \in \mathbb{R}$ .

Pastaba Analogiški teiginiai yra teisingi, ir kai  $a$  ir/arba  $A$  lygūs  $\pm\infty$ , imant atitinkamai tų taškų aplinkas vietoje  $\varepsilon$ -aplinkų:

$$\forall \text{ taško } A \text{ aplinkai } U(A) \exists \text{ taško } a \text{ aplinka } V(a) \text{ tokia, kad } f(x) \in U(A), \text{ kai } x \in V(a) \setminus \{a\} \text{ ir } x \in E.$$

(Apibrėžimas “aplinkų kalba”).

Teiginiai 4.3

- Funkcija viename taške gali turėti tik vieną ribą.
- Sakykime,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  ir  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ , o  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \in \mathbb{R}$ . Tada
  - $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$
  - $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$
  - Jei, be to,  $B \neq 0$ , tai  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$
  - Jei  $f(x) \leq g(x)$ , kai  $x \in E \setminus \{a\}$ , tai  $A \leq B$ .
- Jei  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ , kai  $x \in E \setminus \{a\}$ , ir  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ , tai  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$ .

4. Jei  $A < B$ , tai egzistuoja taško  $a$  aplinka  $U$ , tokia, kad  $f(x) < g(x)$  kai  $x \in U \setminus \{a\}$ ,  $x \in E$ .

## Pavyzdžiai 4.4

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  neegzistuoja.
- 3'  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

**Apibrėžimas 4.5** Sakoma, kad funkcija  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  yra tolydi taške  $x_0 \in E$ , jei su kiekviena seka  $E \ni x_n \rightarrow x_0$  turime  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Sakoma, kad funkcija  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  yra tolydi aibėje  $A \subset E$ , jei ji yra tolydi visuose aibės  $A$  taškuose.

## Pastabos 4.6

1. Palyginę funkcijos ribos apibrėžimą su tolydžios funkcijos apibrėžimu, matome, kad funkcija yra tolydi taške  $x_0$ , kai  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , ir  $x_0$  yra ribinis aibės  $E$  taškas. Jei  $x_0$  nėra ribinis taškas, tai funkcija tame taške visada tolydi.
2. Atsižvelgdami į 4.2 teiginį, matome, kad funkcija  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  yra tolydi taške  $x_0 \in E$  tada ir tik tada, kai  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ , kai  $|x - x_0| < \delta$  ir  $x \in E$ .

## Teiginiai 4.7

1. Jei  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  ir  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  yra tolydžios taške  $x_0 \in E$ , tai funkcijos  $(f + g)$ ,  $(fg)$  ir (jei  $g(x_0) \neq 0$ )  $\left(\frac{f}{g}\right)$  yra tolydžios taške  $x_0$ .
2. Jei funkcija  $f : E \rightarrow E_1$  yra tolydi taške  $x_0 \in E$ , o funkcija  $g : E_1 \rightarrow \mathbb{R}$  yra tolydi taške  $y_0 := f(x_0)$ , tai funkcija  $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ ,  $x \in E$  yra tolydi taške  $x_0$ .

## Pavyzdžiai 4.8

1.  $f(x) = c$ ,  $x, c \in \mathbb{R}$  yra tolydi aibėje  $\mathbb{R}$ .
2.  $f(x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  yra tolydi aibėje  $\mathbb{R}$ .
3.  $f(x) = x^n$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  yra tolydi aibėje  $\mathbb{R}$ .
- 3'  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$  yra tolydi aibėje  $\mathbb{R}$ .
- 3'' Kiekviena racionali funkcija  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  (dviejų polinomų santykis) yra tolydi visuose taškuose  $x_0 \in \mathbb{R}$ , kuriuose  $Q(x_0) \neq 0$ .
4.  $f(x) = \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  yra tolydi aibėje  $\mathbb{R}$ .
5.  $f(x) = \cos x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  yra tolydi aibėje  $\mathbb{R}$ .
6.  $f(x) = \tan x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  yra tolydi visuose taškuose, kuriuose  $\cos x \neq 0$ .
7.  $f(x) = a^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a \geq 0$ ,  $a \neq 1$  yra tolydi aibėje  $\mathbb{R}$ .
8.  $f(x) = \log_a x$ ,  $x > 0$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  yra tolydi aibėje  $\mathbb{R}$ .
9.  $f(x) = x^a$ ,  $x > 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$  yra tolydi aibėje  $\mathbb{R}$ .
10. Išvados:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} &= \log_a e \\ \text{Atskiru atveju, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} &= 1 \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} &= \alpha \end{aligned}$$

Apibrėžimas 4.9 Aibę visų tolydžių funkcijų  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  žymėsime  $C(E)$ . Galima trumpinti:  $C[a, b] = C([a, b])$ .

Teiginys 4.10 (Bolcmano-Wejerštraso teorema apie tarpines reikšmes) Sakykime, funkcija  $f \in C[a, b]$ ,  $f(a) = A$ ,  $f(b) = B$  ir  $A \leq C \leq B$  arba  $B \leq C \leq A$ . Tada  $\exists c \in [a, b]$   $f(c) = C$  ("tolydi funkcija įgyja visas tarpines reikšmes").

Teiginys 4.11 (Wejerštraso teorema apie maksimalią reikšmę) Sakykime,  $f \in C[a, b]$ . Tada

1.  $f$  yra apžėta intervale  $[a, b]$ :  $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leq M$ .
2.  $\exists x_d \in [a, b] \quad f(x_d) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$   
 $\exists x_m \in [a, b] \quad f(x_m) = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$   
(Tolydi uždaramame intervale funkcija įgyja tame intervale didžiausią ir mažiausią reikšmę).

Pastaba Intervalo uždaramumas – esminė sąlyga. Pvz.,  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in (0, 1]$ ,  $f \in C(0, 1]$ , bet maksimumas neegzistuoja, nes  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  (tiksliau,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{n}) = +\infty$ ).

Kitas pavyzdys:  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ,  $x \in (0, 1)$ .  $f(x) \in C(0, 1)$ ,  $\sup f(x) = 1$ ,  $\inf f(x) = \frac{1}{2}$ , bet neegzistuoja toks  $x_d \in (0, 1) \quad f(x_d) = 1$ .

Teiginys 4.12 (apie atvirkštinės funkcijos tolydumą) Tarkime,  $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$  ( $X$  – intervalas) yra tolydi bijekcija. Tada

1.  $Y$  taip pat intervalas, be to  $f$  yra monotoniška.
2.  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  taip pat yra tolydi.

Išvada 4.13

1. Funkcijos  $\log_n x$  ( $x > 0$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ),  $\arcsin x$  ( $x \in [-1, 1]$ ),  $\arccos x$  ( $x \in [-1, 1]$ ),  $\arctan x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) yra tolydžios funkcijos.
2. Visos elementarios funkcijos yra tolydžios savo egzistavimo srityse.  
elementarios funkcijos – daugianariai, racionaliosios funkcijos, trigonometrinės ir jų atvirkštinės, rodyklinė, logaritminė funkcijos, bei visos iš jų padarytos funkcijos, naudojant aritmetinius veiksmus bei kompoziciją.  
egzistavimo sritis – aibė, kurioje funkcija turi prasmę. Apibrėžimo sritis visada yra egzistavimo srities poaibis.

Pastaba  $|x|$  nėra tolydi funkcija:  $|x| = \sqrt{x^2} = e^{\frac{1}{2} \ln x^2}$  neegzistuoja, kai  $x = 0$ .

Apibrėžimas 4.14 Funkcija  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  vadinama tolygiai tolydžia aibėje  $E$ , jei  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon$ , kai  $|x - y| < \delta$  ir  $x, y \in E$ .

Pastaba Palyginkime su tolydžios aibėje  $E$  funkcijos apibrėžimu:  $\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon$ , kai  $|x - y| < \delta$  ir  $y \in E$ .

Pavyzdžiai 4.15

1.  $f(x) = x^2$ ,  $x \in [-a, a]$  yra tolygiai tolydi intervale  $[-a, a]$ .
2.  $f(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  nėra tolygiai tolydi.
3.  $f(x) = \sin x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  nėra tolygiai tolydi.

4.  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  nėra tolygiai tolydi.

**Teorema 4.16 (Kantoro teorema)** Jei  $f \in C[a, b]$ , tai funkcija yra tolygiai tolydi intervale  $[a, b]$ .

**Pavyzdys 4.17**  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ,  $x \in (0, 1)$  yra tolygiai tolydi intervale  $(0, 1)$ .

**Apibrėžimas 4.18** Sakoma, kad funkcija  $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  turi trūkį taške  $x_0 \in E$ , jei ji nėra tolydi tame taške. Taškas  $x_0 \in E$  vadinamas funkcijos  $f$  pirmo tipo trūkio tašku, jei  $\exists f(x_0 - 0) := \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \in \mathbb{R}$  ir  $\exists f(x_0 + 0) := \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \in \mathbb{R}$ . Atskiru atveju, kai  $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ ,  $x_0$  vadinamas pašalinamu funkcijos  $f$  trūkio tašku. Likusiais atvejais (kai bent viena riba  $f(x_0 - 0)$  arba  $f(x_0 + 0)$  neegzistuoja arba yra begalinė),  $x_0$  vadinamas funkcijos  $f$  antro tipo trūkio tašku.

**Pastaba** Dažnai patogiu vadinti trūkio taškais ir taškus  $x_0 \in \mathbb{R}$ , kai  $\dot{U}_{\varepsilon ps}(x_0) := U_\varepsilon \setminus \{x_0\} \subset E$

**Pastaba** Trūkio taškai, panašūs į funkcijos  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$   $x_0 = 0$  dar vadinami osciliuojančiais.

**Pavyzdžiai 4.19**

1.  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .  $x_0 = 0$  yra pašalinamas I tipo trūkio taškas.
2.  $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .  $x_0 = 0$  yra I tipo trūkio taškas.
3.  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .  $x_0 = 0$  yra II tipo (begalinis) trūkio taškas.
4.  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .  $x_0 = 0$  yra II tipo (osciliuojantis) trūkio taškas.

**Teiginys 4.20** Monotoninė funkcija  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  neturi II tipo trūkio taškų. Jos trūkio taškų aibė yra baigtinė arba skaičioji.

## 5 Diferencijavimas

**Apibrėžimas 5.1** Sakoma, kad funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I$  – intervalas) yra diferencijuojama taške  $x \in I$ , jei  $\exists \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \in \mathbb{R}$ . Tokiu atveju pastaroji riba vadinama funkcijos  $f$  išvestine taške  $x$  ir žymima  $f'(x)$ .

Pakeitę nurodytą ribą riba iš dešinės (iš kairės), gausime dešininės (kairinės) išvestinės apibrėžimą. Jos žymimos  $f'_d(x)$ ,  $f'_+(x)$  ( $f'_k(x)$ ,  $f'_-(x)$ ).

Jei funkcija  $f$  yra diferencijuojama su visais  $x \in I$ , tai sakoma, kad funkcija  $f$  yra diferencijuojama intervale  $I$ .

**Pastaba 5.2 (Geometrinė išvestinės prasmė)** Sakykime, funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  yra diferencijuojama taške  $x$ . Tada  $\varepsilon(t) := \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f'(x) \rightarrow 0$ , kai  $t \rightarrow x$ .  $f(t) = f(x) + f'(x)(t - x) + \underbrace{\varepsilon(t)(t - x)}_{\text{„mažas“}}$ . Atmetę paskutinį

“mažą” narį gauname tiesinę funkciją  $y(t) = f(x) + f'(x)(t - x)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , kuri, kai  $t$  “arti”  $x$ , įgyja reikšmes, “artimas”  $f(x)$ . Ši funkcija vadinama funkcijos  $f(x)$  liestine taške  $x$ . Geometriškai jos grafikas yra funkcijos  $f$  grafiko liestinė taške  $(x, f(x))$ .

Liestinės kampinis koeficientas  $\tan \alpha = f'(x)$ .

**Teiginys 5.3** Jei funkcija  $f$  diferencijuojama taške  $x$ , tai ji tolydi tame taške.

**Teiginys 5.4** Jei funkcijos  $f, g$  yra diferencijuojamos taške  $x \in I$ , tai

1.  $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ .
2.  $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ .
3.  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ , jei  $g(x) \neq 0$ .

**Teiginys 5.5** Jei  $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$  yra diferencijuojama taške  $x \in (a, b)$ , o  $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$  yra diferencijuojama taške  $y = f(x)$ , tai funkcija  $g \circ f$  yra diferencijuojama taške  $x$  ir  $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x)$ .

**Pavyzdžiai 5.6**

1.  $f(x) = C, x \in \mathbb{R}. f'(x) = 0.$

2.  $f(x) = x, x \in \mathbb{R}. f'(x) = 1.$

3.  $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}. f'(x) = 2x.$

$f(x) = x^n, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. f'(x) = nx^{n-1}.$

4.  $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}. f'(x) = \cos x.$

$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}. f'(x) = -\sin x.$

$f(x) = \tan x, x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\}. f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$

$f(x) = \cot x, x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi n, n \in \mathbb{Z}\}. f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

5.  $f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1. f'(x) = a^x \ln a.$

Atskiru atveju  $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}. f'(x) = e^x.$

6.  $f(x) = \log_a x, x > 0, a > 0, a \neq 1. f'(x) = \frac{1}{x \ln a}.$

Atskiru atveju  $f(x) = \ln x, x > 0. f'(x) = \frac{1}{x}.$

7.  $f(x) = x^a, x > 0, a \in \mathbb{R}. f'(x) = ax^{a-1}.$

Galima įsitikinti, kad ši formulė teisinga, ir kai  $x < 0$ , jei  $x^a$  turi prasmę.

$(x^{\frac{m}{n}})' = (\sqrt[n]{x^m})'$  – ši formulė irgi teisinga, kai  $x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$

8.  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & | x \neq 0 \\ 0 & | x = 0 \end{cases}, x \in \mathbb{R}.$

$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & | x \neq 0 \\ 0 & | x = 0 \end{cases}.$

Įdomu, kad riba  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$  neegzistuoja (t.y.  $f'$  nėra tolydi funkcija).

9.  $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}. f'_d(0) = 1, f'_k(0) = -1.$

10.  $\left( \underbrace{f(x)}_{>0}^{g(x)} \right)' = f(x)^{g(x)} \left( g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x) \right).$

$(x^x)' = x^x (\ln x + 1).$

**Teiginys 5.7** (Atvirkštinės funkcijos išvestinė) Jei griežtai didėjanti funkcija  $f \in C(a, b)$  yra diferencijuojama taške  $x_0 \in (a, b)$  ir  $f(x) \neq 0$ , tai jos atvirkštinė funkcija  $f^{-1}$  yra diferencijuojama taške  $y_0 := f(x_0)$  ir  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ .

**Pavyzdžiai 5.8**

1.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1).$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1).$

$$2. (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

**Apibrėžimas 5.9** Taškas  $x \in E$  vadinamas funkcijos  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  lokalo maksimumo tašku, jei  $\exists \varepsilon > 0 \quad f(y) \leq f(x)$ , kai  $y \in U_\varepsilon(x) \cap E$ . Analogiškai apibrėžiamas lokalo minimumo taškas. Šie taškai vadinami funkcijos (lokaliniais) ekstremumo taškais.

**Teiginys 5.10 (Ferma teorema)** Jei  $x_0 \in (a, b)$  yra funkcijos  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ekstremumo taškas ir  $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$ , tai  $f'(x_0) = 0$ .

**Teiginys 5.11 (Rolio teorema)** Jei  $f \in C[a, b]$  yra diferencijuojama intervale  $(a, b)$ , ir  $f(a) \neq f(b)$ , tai  $\exists c \in (a, b) \quad f'(c) = 0$ .

**Teiginys 5.12 (Koši vidutinės reikšmės teorema)** Jei funkcijos  $f, g \in C[a, b]$  yra diferencijuojamos intervale  $(a, b)$ , tai  $\exists c \in (a, b) \quad (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$ .

**Pastaba** Jei  $g'(x) \neq 0, x \in (a, b)$ , tai lygybę galima užrašyti taip:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

**Išvada 5.13 (Lagranžo vidutinės reikšmės teorema)** Jei  $f \in C[a, b]$  yra diferencijuojama intervale  $(a, b)$ , tai  $\exists c \in (a, b) \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .

**Teiginys 5.14** Sakykme, funkcija  $f$  yra diferencijuojama intervale  $(a, b)$ . Tada

1. Jei  $f'(x) \geq 0, x \in (a, b)$ , tai  $f$  didėja intervale  $(a, b)$  (t.y.  $\forall a \leq x < y \leq b \quad f(x) \leq f(y)$ ).
2. Jei  $f'(x) \leq 0, x \in (a, b)$ , tai  $f$  mažėja intervale  $(a, b)$  (t.y.  $\forall a \leq x < y \leq b \quad f(x) \geq f(y)$ ).
3. Jei  $f'(x) = 0, x \in (a, b)$ , tai  $f$  – konstanta (t.y.  $\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in (a, b) \quad f(x) = c$ ).

**Pastaba** Pakeitę nelygybes griežtomis gausime griežtai monotoniškas funkcijas, bet ne atvirkščiai. Pvz.,  $f(x) = x^3$  griežtai didėja aibėje  $\mathbb{R}$ , bet  $f'(0) = 0$ .

**Teiginys 5.15** Jei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I \subset \mathbb{R}$  – baigtinis arba begalinis intervalas) turi aprėžtą išvestinę intervale  $I$ , tai  $f$  yra tolygiai tolydi tame intervale.

**Pastaba** Šis požymis nėra būtinas. Pvz.,  $\sqrt{x} \in (0, 1)$  yra tolygiai tolydi, nors neturi išvestinės taške  $x = 0$ .

**Teorema 5.16 (Lopitalio taisyklė)** Tarkime, kad funkcijos  $f$  ir  $g$  yra diferencijuojamos intervale  $(a, b)$  ( $-\infty \leq a < b < +\infty$ ) ir

1.  $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} g(x) = 0$  arba  $\lim_{x \downarrow a} g(x) = +\infty$ .
2.  $g'(x) \neq 0$ , kai  $x \in (a, b)$ .
3.  $\exists \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Tada  $\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ .

**Pavyzdžiai 5.17**

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{10}}{e^{\frac{x}{10}}} = 0.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, a > 0.$$

Panašiai galima įrodyti, kad  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^n x}{x^a} = 0, a > 0, n \in \mathbb{N}$ .

**Apibrėžimas 5.18** Jei funkcija  $f$  yra diferencijuojama intervale  $I$ , ir jos išvestinė  $f'(x), x \in I$ , taip pat yra diferencijuojama funkcija, tai jos išvestinė  $(f')'(x)$  vadinama funkcijos  $f$  antrąja išvestine ir žymima  $f''(x)$  arba  $f^{(2)}(x)$ . Analogiškai apibrėžiamos aukštesnių eilių išvestinės  $f'''(x) = f^{(3)}(x), \dots, f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$ , su sąlyga, kad jos egzistuoja.

Visų funkcijų  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , turinčių visų eilių tolydžias išvestines iki  $n$ -tosios eilės imtinai aibė žymima  $C^n[a, b] := \{f(x) : \forall k = 1, \dots, n \ f^{(k)} \in C[a, b]\}$ . Be to,  $f \in C^\infty[a, b] \iff \forall n \in \mathbb{N} \ \exists f^{(n)} \in C[a, b]$ .

**Teorema 5.19 (Teiloro formulė)** Tarkime, funkcija  $f \in C^n[x_0, x]$  yra  $(n + 1)$  kartą diferencijuojama intervale  $(x_0, x)$  (tam pakanka  $f \in C^{n+1}[x_0, x]$ ). Tada  $\exists c \in (x_0, x)$  :

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{=: P_n(x_0; x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}}_{=: R_n(x_0; x)}$$

Daugianaris  $P_n(x_0; x)$  vadinamas Teiloro daugianariu, o reiškinys  $R_n(x_0; x)$  – Teiloro formulės liekamuoju nariu Lagranžo pavidalu.

Pastabos 5.20

1. Formulė teisinga ir intervalui  $[x, x_0]$ , kai  $x < x_0$ .
2. Teiloro formulė leidžia “sudėtingos” funkcijos reikšmių skaičiavimą pakeisti “paprastos” funkcijos – daugianario  $P_n(x_0; x)$  reikšmių skaičiavimu, kai  $R_n(x_0; x)$  yra “mažas” (pastaroji situacija yra tipiška).
3. Ypač dažnai ši formulė naudojama, kai  $x_0 = 0$ :

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

(Makloreno formulė)

4. Liekamojo nario Koši pavidalas:

$$R_n(x_0; x) = \frac{f^{(n+1)}(\tilde{c})}{n!} (x - \tilde{c})(x - x_0)^n$$

5. Kai  $n = 2$ :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + \frac{f'''(c)}{3!} (x - x_0)^3$$

Pirmi du nariai – liestinės lygtis (“geriausiai prigludanti tiesė”), pirmi trys nariai – “geriausiai prigludanti parabolė” ir t.t.

**Apibrėžimas 5.21** Rašysime  $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$ , jei egzistuoja tokia funkcija  $\varepsilon(x)$ , apibrėžta taško  $a$  aplinkoje, kad  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ , kai  $x \rightarrow a$ , ir  $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$  (taško  $a$  aplinkoje). Jei  $g(x) \neq 0$  taško  $a$  aplinkoje, tai  $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow a \iff \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0, x \rightarrow a$ .

Pastaba Jei  $g(x) \rightarrow 0$  ir  $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$ , tai sakoma, kad “ $f$  nyksta greičiau nei  $g$ ”,  $x \rightarrow a$ .

Jei  $g(x) \rightarrow +\infty$ , tai sakoma, kad “ $f$  auga greičiau nei  $g$ ”.

Pavyzdžiai  $x^2 = o(x), x \rightarrow 0$

$$x = o(x^2), x \rightarrow +\infty$$

$$x^a = o(e^x), x \rightarrow +\infty$$

$$\lg x = o(x^a), x \rightarrow +\infty$$

Išvada 5.22 (Teiloro formulė su Peano pavidalo liekamuoju nariu) Jei  $f \in C^n[x_0, x]$ , tai  $f(t) = P_n(x_0; t) + o(|x - x_0|^n)$ ,  $x \rightarrow x_0$ , t.y.  $\frac{R_n(x_0; x)}{|x - x_0|^n} \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow x_0$ .

Apibrėžimas 5.23 Tarkime, kad funkcija  $f$  yra be galo diferencijuojama taško  $x_0$  aplinkoje. Funkcijos  $f$  Teiloro eilutė su centru  $x_0$  vadinama funkcijų eilutė

$$f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Pastebėkime, kad Teiloro eilutės dalinės sumos yra jos Teiloro daugianariai  $P_n(x_0; x)$ , todėl ši eilutė konverguoja su tais  $x$ , su kuriais Teiloro formulės liekamasis narys  $R_n(x_0; x) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  ir tokiu atveju

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Pavyzdžiai 5.24

$$1. e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}.$$

$$2. \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\cos x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R}.$$

$$3. \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, x \in (-\frac{1}{2}, 1] \text{ (iš tiesų formulė teisinga, kai } x \in (-1; 1], \text{ tik tai sunku įrodyti turimomis priemonėmis).}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Funkcijos Teiloro eilutė tapačiai lygi nuliui.

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}}{x^7} = -\frac{1}{7!}.$$

Apibrėžimas 5.25 Funkcija  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  vadinama iškila (žemyn) intervale  $I \subset E \subset \mathbb{R}$ , jei  $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$ , su visais  $x_1, x_2 \in I$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ .

Reikalaudami griežtos nelygybės gauname griežtai iškilos (žemyn) funkcijos apibrėžimą.

Pakeitę nelygybę priešinga, gauname iškilos aukštyn arba išgaubtos funkcijos apibrėžimą.

Teiginys 5.26 Diferencijuojama funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  yra iškila (žemyn) intervale  $I$  tada ir tik tada, kai jos išvestinė  $f'$  didėja intervale  $I$ . Griežtą išvestinės didėjimą atitinka griežtas funkcijos iškilumas.

Išvada 5.27 Dukart diferencijuojama funkcija  $f$  yra iškila intervale  $I$  tada ir tik tada, kai  $f'' \geq 0$  intervale  $I$ . Jei  $f'' > 0$  intervale  $I$ , tai  $f$  – griežtai iškila (nebūtinai atvirkščiai).

Pastaba Analogiškas tvirtinimas teisingas ir išgaubtai funkcijai.

Apibrėžimas 5.28 Taškas  $x_0 \in (a, b)$  vadinamas funkcijos  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  perlinkio tašku, jei  $\exists \varepsilon > 0$  toks, kad  $f$  yra iškila intervale  $U_{\varepsilon}^{-}(x_0) := (x_0 - \varepsilon, x_0)$  ir išgaubta intervale  $U_{\varepsilon}^{+}(x_0) := (x_0, x_0 + \varepsilon)$  arba atvirkščiai.

Išvada 5.29 (Iš 5.26) Jei  $x_0$  yra dukart diferencijuojamas funkcijos perlinkio taškas, tai  $f''(x_0) = 0$  (nebūtinai atvirkščiai).

## 6 Funkcijų sekų ir eilučių tolydusis konvergavimas

**Apibrėžimas 6.1** Sakoma, kad funkcijų seka  $(f_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  konverguoja į funkciją  $f$  aibėje  $E$ , jei  $\forall x \in E \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$ , kai  $n \rightarrow \infty$ . Toks funkcijų sekos konvergavimas vadinamas paprastu arba pataškiu ir žymimas  $f_n \rightarrow f$ ,  $n \rightarrow \infty$  (aibėje  $E$ ).

Sakoma, kad funkcijų seka  $(f_n)$  konverguoja į funkciją  $f$  tolygiai aibėje  $E$ , jei  $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Žymima  $f_n \rightrightarrows f$ ,  $n \rightarrow \infty$  (aibėje  $E$ ).

**Pastaba 6.2**  $f_n \rightarrow f \iff \forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ , kai  $n > N$

$f_n \rightrightarrows f \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ , kai  $n > N$

Skirtumas – tolygaus konvergavimo atveju  $N$  priklauso tik nuo  $\varepsilon$  ir nepriklauso nuo  $x$ .

**Pavyzdžiai 6.3**

$$1. \quad f_n(x) = x^n, x \in [0, 1]. \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}.$$

Funkcijų seka konverguoja pataškiui.

$$2. \quad f_n(x) = x^n - x^{n+1}, x \in [0, 1]. \quad f(x) = 0.$$

Funkcijų seka konverguoja tolygiai.

$$3. \quad f_n(x) = x^n - x^{2n}, x \in [0, 1]. \quad f(x) = 0.$$

Funkcijų seka konverguoja pataškiui.

**Pastaba 6.4** Funkcijoms  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  pažymėkime  $d(f, g) = d_E(f, g) := \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)|$ . Funkcija  $d$  pasižymi šiomis savybėmis:

1.  $d(f, g) = d(g, f)$ .
2.  $d(f, g) \geq 0$ , be to  $d(f, g) = 0 \iff f = g$ .
3.  $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$ ,  $h : E \rightarrow \mathbb{R}$  (Trikampio nelygybė).

Pastebime, kad  $f_n \rightrightarrows f$  aibėje  $E \iff d(f_n, f) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Funkcija  $d$  vadinama tolygaus konvergavimo metrika (atstumu). Kartais – supremumo metrika.

**Teiginys 6.5** (Funkcijų sekos tolygaus konvergavimo Koši kriterijus) Funkcijų seka  $(f_n)$  konverguoja tolygiai (į kokią nors funkciją  $f$ ) aibėje  $E$  tada ir tik tada, kai

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad d(f_n, f_m) = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \text{ kai } m, n > N$$

**Apibrėžimas 6.6** Sakoma, kad funkcijų eilutė  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  konverguoja tolygiai aibėje  $E$ , jei jos dalinių sumų seka  $S_n := \sum_{k=1}^n f_k$ ,  $n \in \mathbb{N}$  konverguoja tolygiai aibėje  $E$  į kokią nors funkciją  $f$ . Tokiu atveju rašoma  $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$  tolygiai aibėje  $E$  (arba  $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$  tolygiai pagal  $x \in E$ ).

**Teiginys 6.7** (Funkcijų eilučių tolygaus konvergavimo Vejerštraso požymis) Jei  $|f_n(x)| \leq c_n$ ,  $x \in E$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ir  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty$ , tai funkcijų eilutė  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  konverguoja tolygiai aibėje  $E$ .

**Teorema 6.8** (Teorema apie ribų sukeitimą) Tarkime, kad  $f_n \rightrightarrows f$  aibėje  $E$  ir  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists A_n := \lim_{t \rightarrow x} f_n(t) \in \mathbb{R}$ ,  $t \in E$ . Tada  $\exists \lim_{t \rightarrow x} f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathbb{R}$ . Kitaip tariant,

$$\lim_{t \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x} f_n(t)$$

**Pastaba** Be tolygaus konvergavimo toks ribų sukeitimas ne visada teisingas. Pvz.,  $f_n(x) = x^n$ ,  $x \in E = (0, 1)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x} f_n(t) &= 1 \end{aligned}$$

**Išvada 6.9** Jei  $f_n \in C(E)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ir  $f_n \rightrightarrows f$  aibėje  $E$ , tai  $f$  taip pat tolydi.

Pastaba Funkcijų sekos tolydus konvergavimas yra esminis:

$$f_n(x) = x^n, x \in E = [0, 1], f_n(x) \rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & | x \in [0, 1) \\ 1 & | x = 1 \end{cases}.$$

**Teorema 6.10 (Dinio lema)** Tarkime, kad funkcijų seka  $(f_n \in C[a, b])$  kiekvienam taške monotoniškai artėja prie funkcijos  $f \in C[a, b]$ . Tada  $f_n$  konverguoja tolygiai.

Pastaba Monotoniškumas yra esminis. Pvz.,  $f_n(x) = x^n - x^{2n}, x \in [0, 1], f_n \rightarrow 0$  (pataškiui).

**Teorema 6.11 (Vejerštraso teorema apie tolydžių funkcijų aproksimaciją daugianariais)** Bet kokiai funkcijai  $f \in C[a, b]$  galima rasti daugianarių seką  $(P_n)$ , konverguojančią į  $f$  tolygiai intervale  $[a, b]$ .

**Lema 6.12** Egzistuoja daugianarių seka  $(p_{nk} : n \in \mathbb{N}, k : 0, 1, \dots, n)$ , pasižyminti šiomis savybėmis:

1.  $\forall p_{nk}(x) \geq 0, x \in [0, 1]$ .
2.  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n p_{nk}(x) = 1$
3.  $c_n := \max_{x \in [0, 1]} \sum_{k=0}^n \left( \frac{k}{n} - x \right)^2 p_{nk}(x) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ .

**Apibrėžimas 6.13** Funkcijų eilutė  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$  vadinama laipsnine eilute su centru taške  $a$ ; čia  $c_n$  vadinami laipsninės eilutės koeficientais.

**Teiginys 6.14** Sakykime,  $c_n, n = 0, 1, \dots$  – laipsninės eilutės koeficientai. Pažymėkime

$$R := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \in [0, +\infty].$$

Tada

1. Laipsninė eilutė konverguoja absoliučiai, kai  $x \in (a - R, a + R)$  (t.y.  $|x - a| < R$ ) ir diverguoja, kai  $x \notin [a - R, a + R]$  (t.y.  $|x - a| > R$ ).
2. Jei  $\exists \tilde{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ , tai  $\tilde{R} = R$

$R$  vadinamas laipsninės eilutės konvergavimo spinduliu, o intervalas  $(a - R, a + R)$  – konvergavimo intervalu.

**Teiginys 6.15** Tarkime, turime laipsninę eilutę  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$  su konvergavimo spinduliu  $R$ . Tada  $\forall \tilde{R} < R$  ši laipsninė eilutė konverguoja tolygiai intervale  $[a - \tilde{R}, a + \tilde{R}]$ .

**Išvada 6.16** Laipsninės eilutės suma – tolydi funkcija laipsninės eilutės konvergavimo intervale  $(a - R, a + R)$ .